平成18年7月7日　寒地土木研究所
セミナー「近年の気象変化と融雪出水」

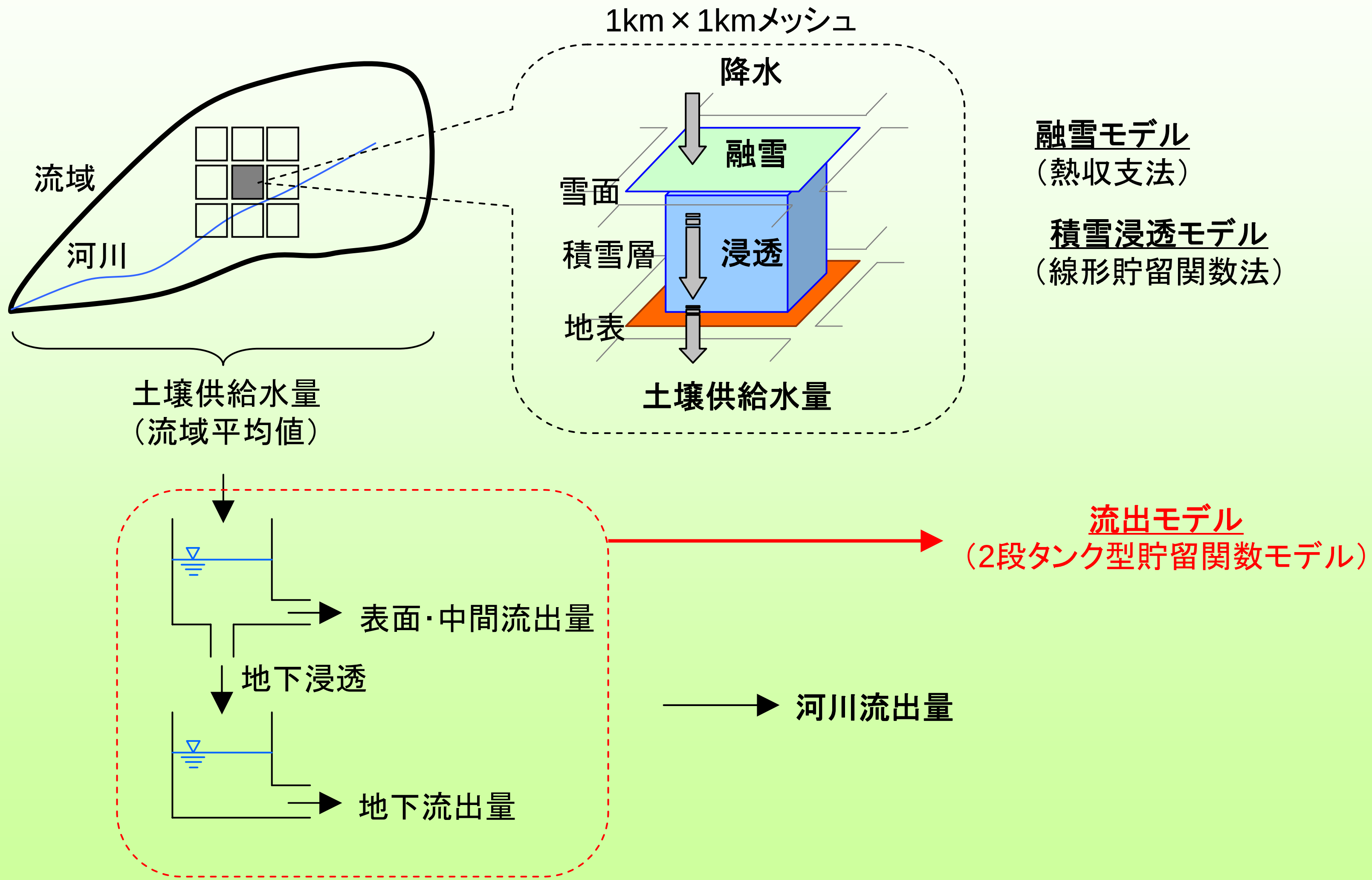
融雪と流出機構

貯留型流出モデルの最適化手法

星　　清

(財)北海道河川防災研究センター
研究所長・理事

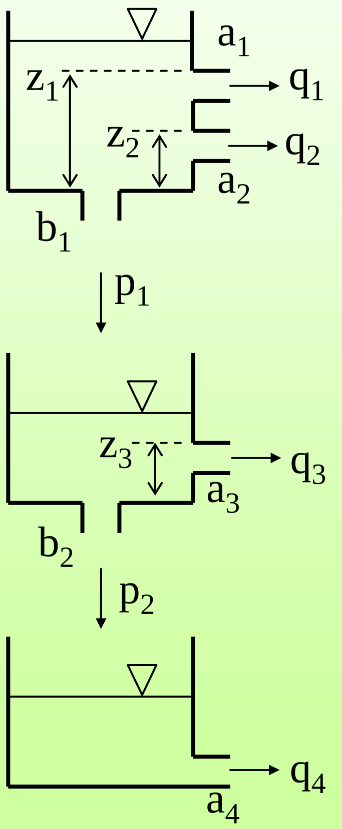
流出ﾓﾃﾞﾙへの入力値の算定方法



流出に関する計算式（流出ﾓﾃﾞﾙ）

●斜面流出

;タンクモデル



a_1=0.320
a_2=0.236
z_1=42.00
z_2=4.430
b_1=0.154

a_3=0.027
b_2=0.040
z_3=17.760

a_4=0.089

斜面流出量=$q_1+q_2+q_3+q_4$

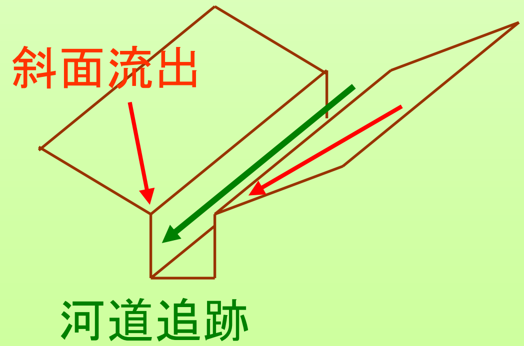
※全ﾒｯｼｭ同じﾊﾟﾗﾒｰﾀで計算

●河道追跡

;kinematic wave式を流量Qに関する式に書き換えた式.

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{5}{3}\frac{i^{0.3}Q^{0.4}}{n^{0.6}B^{0.4}}\frac{\partial Q}{\partial x}=0$$

Q;流量（m³/s）, i;勾配, n;粗度（0.05）,
B;川幅（m）, t;時間（sec）, x;距離（m）



本検討の目的

(1)流出モデルの再検討

・洪水流出解析に貯留関数法の採用が圧倒的に多い。
・モデル定数の同定が依然として試行錯誤に行われている。
・主観的要素を排除する客観的・数学的最適化手法の導入。

(2)PUB対応

・多数の既往洪水事例に流出モデルの適用。
・実用的最適化手法の採用(たとえば一階ニュートン法)。
・モデル定数の総合化(中小河川の洪水ハイドログラフ推定)。
・中小河川の洪水予測手法の高度化。
・融雪流出モデルの一般化と予測への適用。

単一流域における解析

(1) 有効雨量を用いた一般化貯留関数法

(2) 損失を考慮した貯留関数法

（1段タンク型貯留関数モデル）

(3) 地下水流出を考慮した貯留関数法

（2段タンク型貯留関数モデル）

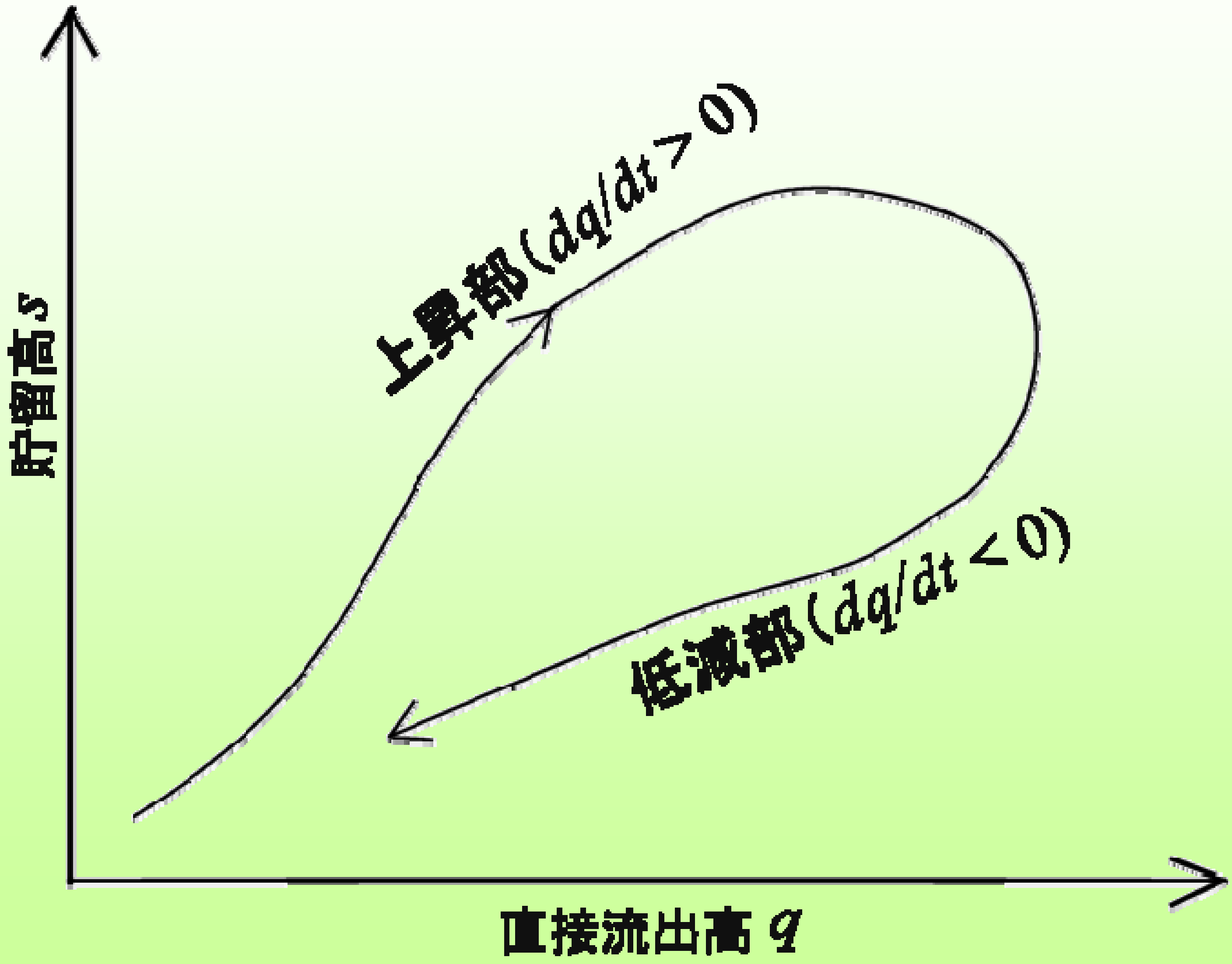
複合流域における解析
（流域流出・河道追跡モデル）

(1) 有効雨量を用いた一般化貯留関数法

(2) 1段タンク型貯留関数モデル

(3) 2段タンク型貯留関数モデル

貯留量と流量の２価性



貯留関数法の基本概念

降雨流出過程模式図

入力	→	流域	→	出力
降雨量		貯留高変化		流出高
$r(t)$		$\dfrac{ds}{dt}$		$q(t)$

$$\frac{ds}{dt} = r(t) - q(t)$$ （連続式）

$$s = f(q)$$ （貯留関数方程式）

（a）$$s = k_1 q + k_2 \frac{dq}{dt}$$ （線形方程式）

（b）$$s = k_1 q^{p_1} + k_2 \frac{d}{dt}(q^{p_2})$$ （非線形方程式）

どんな型式が適当か？

複合流域への適用
(Kinematic waveモデルと貯留関数モデルの比較)

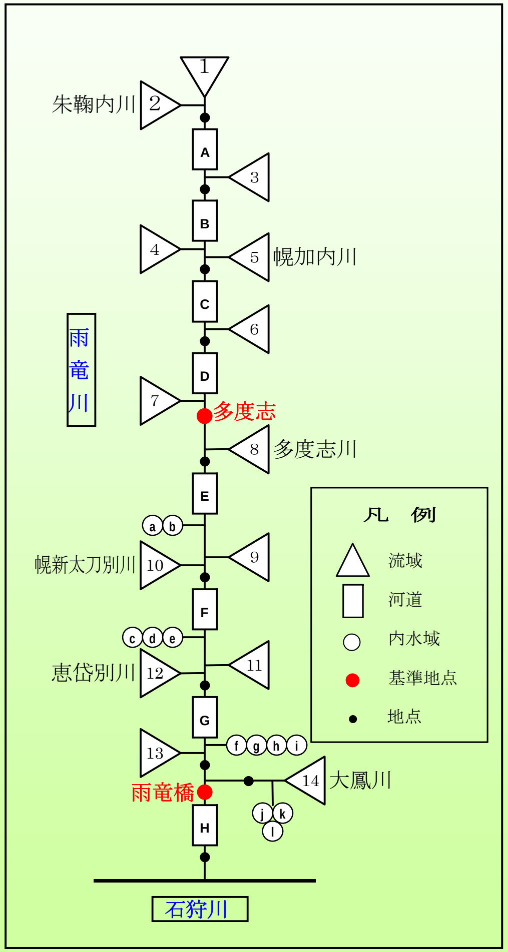
表ー1　雨竜川流域における計算諸元

地　点	流域面積 (km²)	河道長 (km)	分割流域数	分割河道数
多度志	996.0	95.2	7	4
雨竜橋	1661.0	120.8	1 4	7

計算は次の2通りが考えられる。

(1) 分割流域の流出解析と河道追跡にKinematic wave法を用いる。

(2) 分割流域の流出解析と河道追跡ともに貯留関数法を用いる。



雨竜川流出計算モデル図

Kinematic wave法 斜面流出（流域流出モデル）

基本方程式

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q_s}{\partial y}=r \qquad \cdots \ (1)$$

$$q_s=\beta h^{\gamma} \qquad \cdots \ (2)$$

$$s_s=\int_0^L h(y,t)dy \qquad \cdots \ (3)$$

$$h(y,0)=0 \ , \quad h(0,t)=0 \quad \cdots \ (4)$$

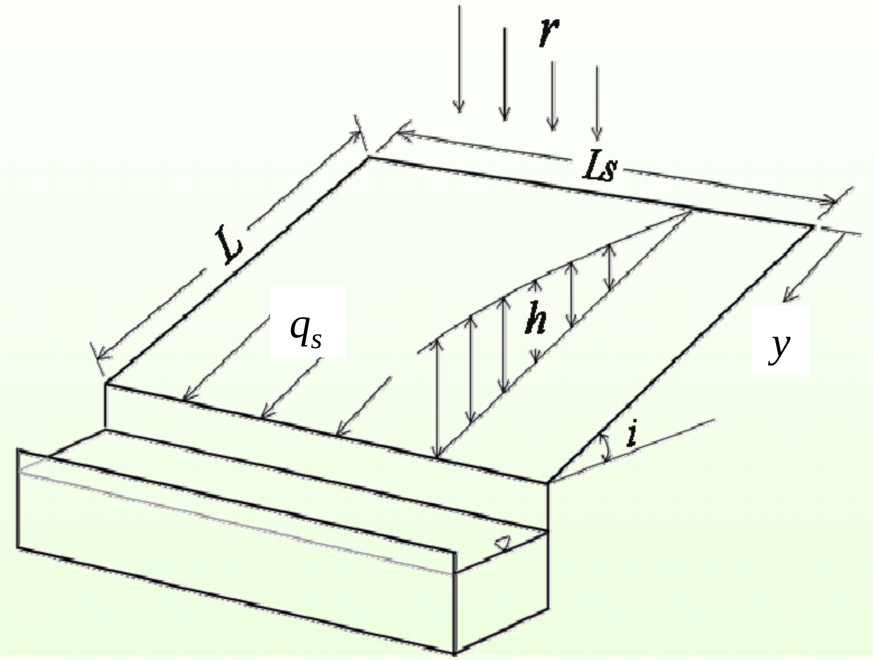


図　一定勾配上の斜面流モデル

ここで、t：時間, y：斜面上流端からの距離, h：水深, q_s：斜面単位幅流量,
s_s：斜面単位幅貯留量, r：有効雨量強度, L：斜面長, β , γ：斜面流定数

(4)式はそれぞれ、水深に関する初期条件と境界条件

Kinematic wave法　河道追跡モデル（横流入がない時）

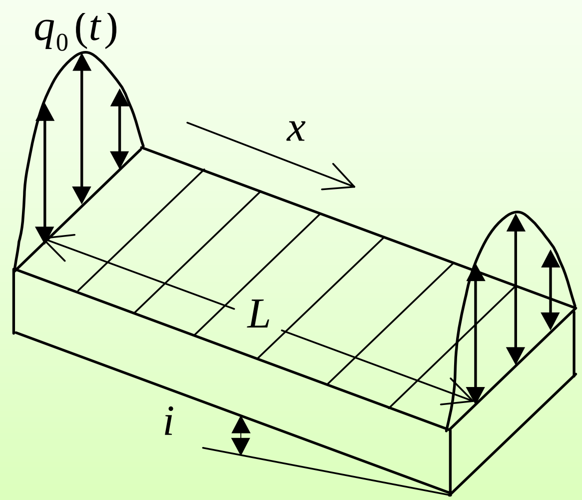
基本方程式

$$\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0 \qquad \cdots (5)$$

$$a=\alpha q^{m} \qquad \cdots (6)$$

$$s=\int_{0}^{L} a(x,t)dx \qquad \cdots (7)$$

$$q(x,0)=0 \quad , \quad q(0,t)=q_0(t) \qquad \cdots (8)$$



図―２　河道流モデル

ここで、t：時間, x：河道距離, q：河道流量, a：横断面積 , α , m：河道流定数

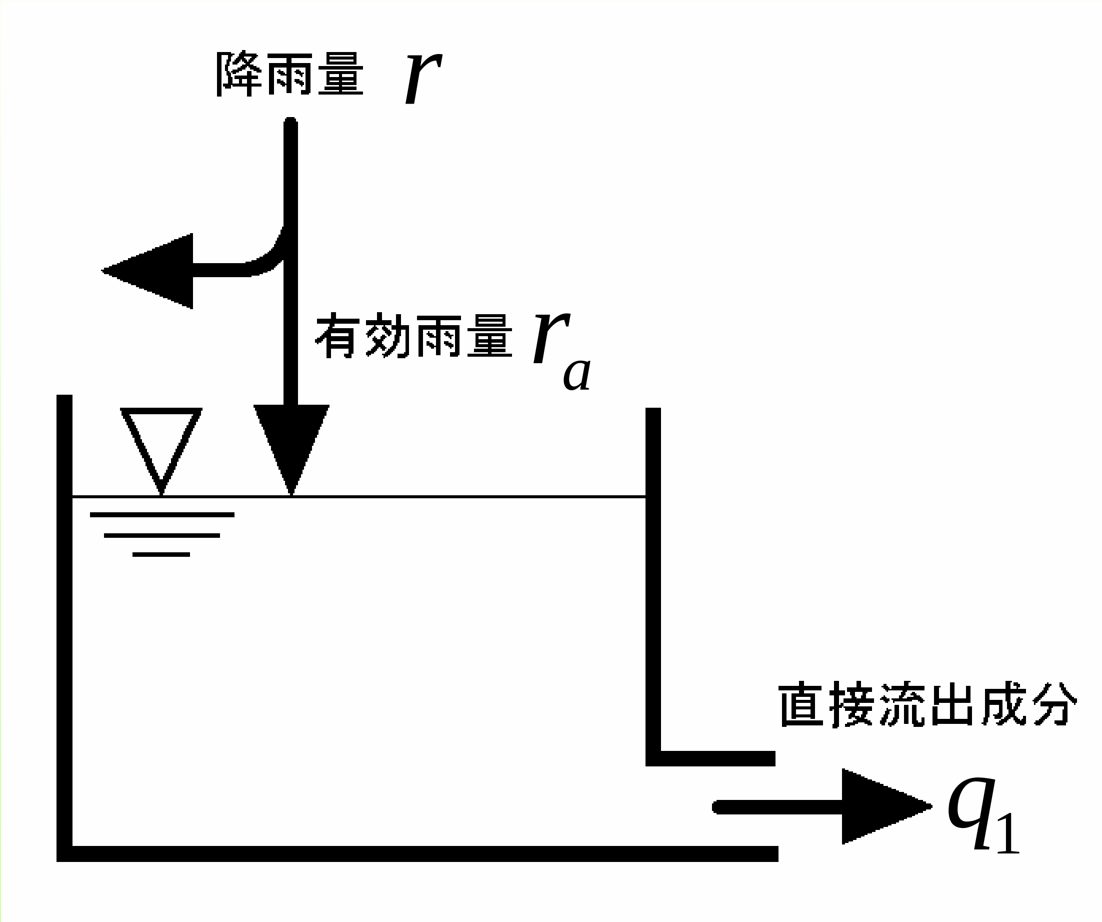
(8)式はそれぞれ、流量に関する初期条件と**上流端境界条件**

複合流域(流域・河道追跡)モデル

流域流出モデル		河道追跡モデル
Kinematic wave法		Kinematic wave法
↓ 集中化	＋	↓ 集中化
貯留関数法		貯留関数法
未知定数3個		6個のモデル定数既知

貯留関数モデル(1)

有効雨量を用いた一般化貯留関数法



$$
\begin{cases}
s = k_1 q_1^{p_1} + k_2 \dfrac{d}{dt}(q_1^{p_2}) \\
\dfrac{ds}{dt} = r_a - q_1
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
p_1 = 0.6 \\
p_2 = 0.4648
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
k_1 = 2.8235\, f_c A^{0.24} \\
k_2 = 0.2835\, k_1^2 \bar{r}_a^{-0.2648} \\
f_c = \left(n / \sqrt{i}\right)^{0.6}
\end{cases}
$$

雨量・流出成分の分離が必要(主観的)

モデルパラメータ

$$\begin{cases} k_1 = 2.8235\, f_c A^{0.24} \\ k_2 = 0.2835\, k_1^2 \bar{r}_a^{-0.2648} \\ f_c = \left(n / \sqrt{i}\right)^{0.6} \end{cases}$$

k_1, k_2 : 貯留係数

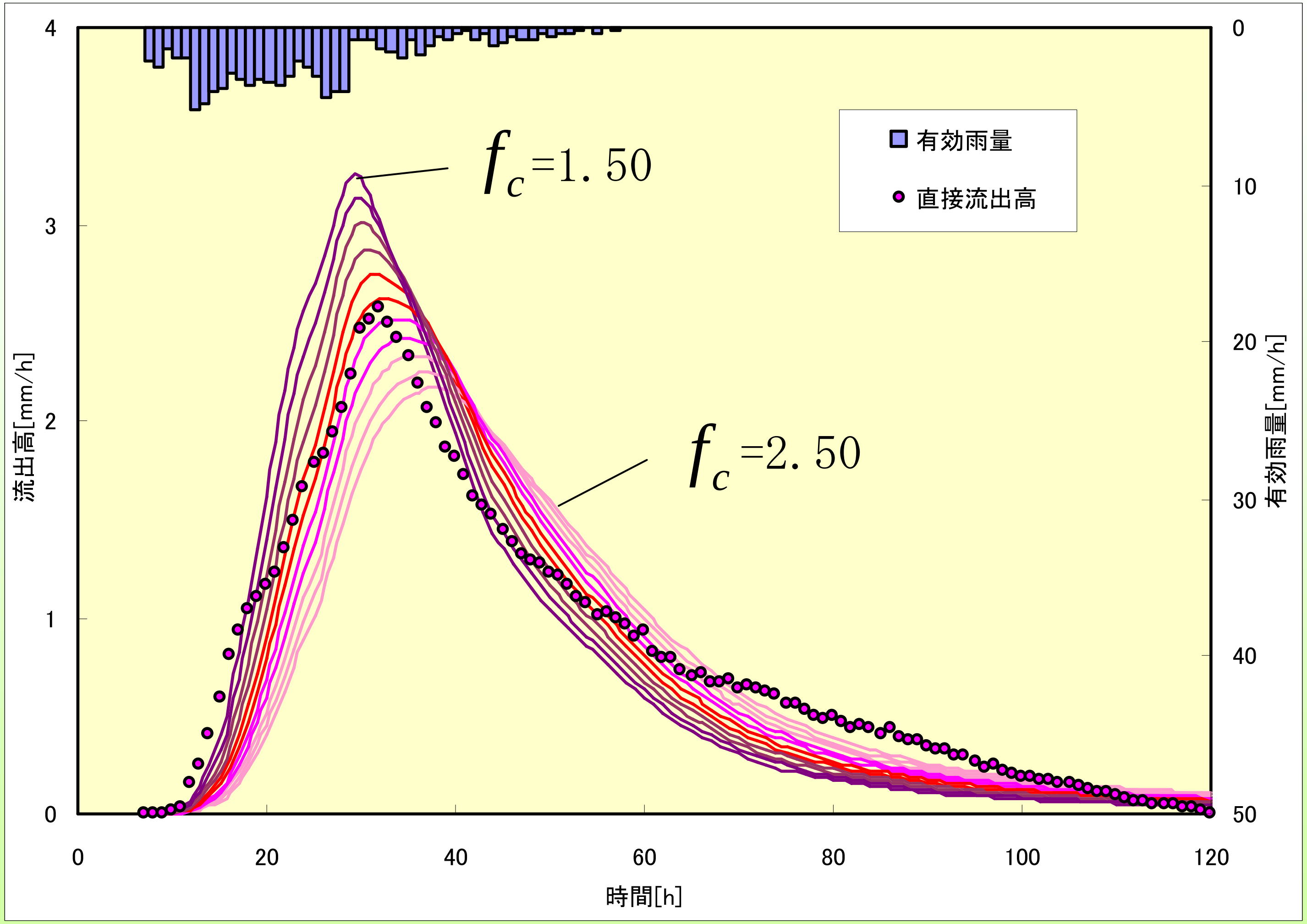
f_c:損失係数

A: 流域面積 (km^2)

$\bar{r}_a$: 平均有効雨量強度 (mm/h)

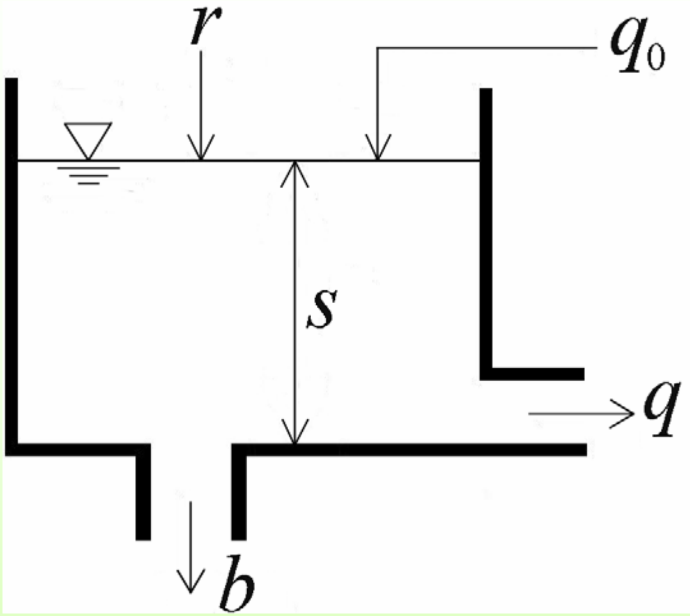
n: 等価粗度 (s/m$^{1/3}$)

i: 斜面勾配



図−12 ファクターが再現ハイドログラフに与える影響

貯留関数モデル（Ⅱ）



損失項を含む貯留関数法
＝1段タンク型貯留関数モデル

$$
\begin{cases}
s = k_{11} q^{p_1} + k_{12} \dfrac{d}{dt}(q^{p_2}) \\
\dfrac{ds}{dt} = r - q - b + q_0 \\
b = k_{13}\ q \\
q_0 = q_B \exp(-\lambda\ t)
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
p_1 = 0.6 \\
p_2 = 0.4648
\end{cases}
$$

s : 貯留高(mm)

r : 観測雨量(mm/h)

q :観測流出高(mm/h)

b : 損失高(mm/h)

q_0: 基底流出高(mm/h)

q_B : 初期流出高(mm/h)

k_{11}, k_{12} : 貯留係数

k_{13} :損失係数

p_1, p_2:貯留指数

λ(=0.019) : 減衰係数

(標準逓減曲線；既往解析結果)

モデルパラメータ

$$
\begin{cases}
k_{11} = c_{11} A^{0.24} \\
k_{12} = c_{12} k_{11}^{2} (\bar{r})^{-0.2648}
\end{cases}
$$

$$c_{13} = 1 + k_{13}$$

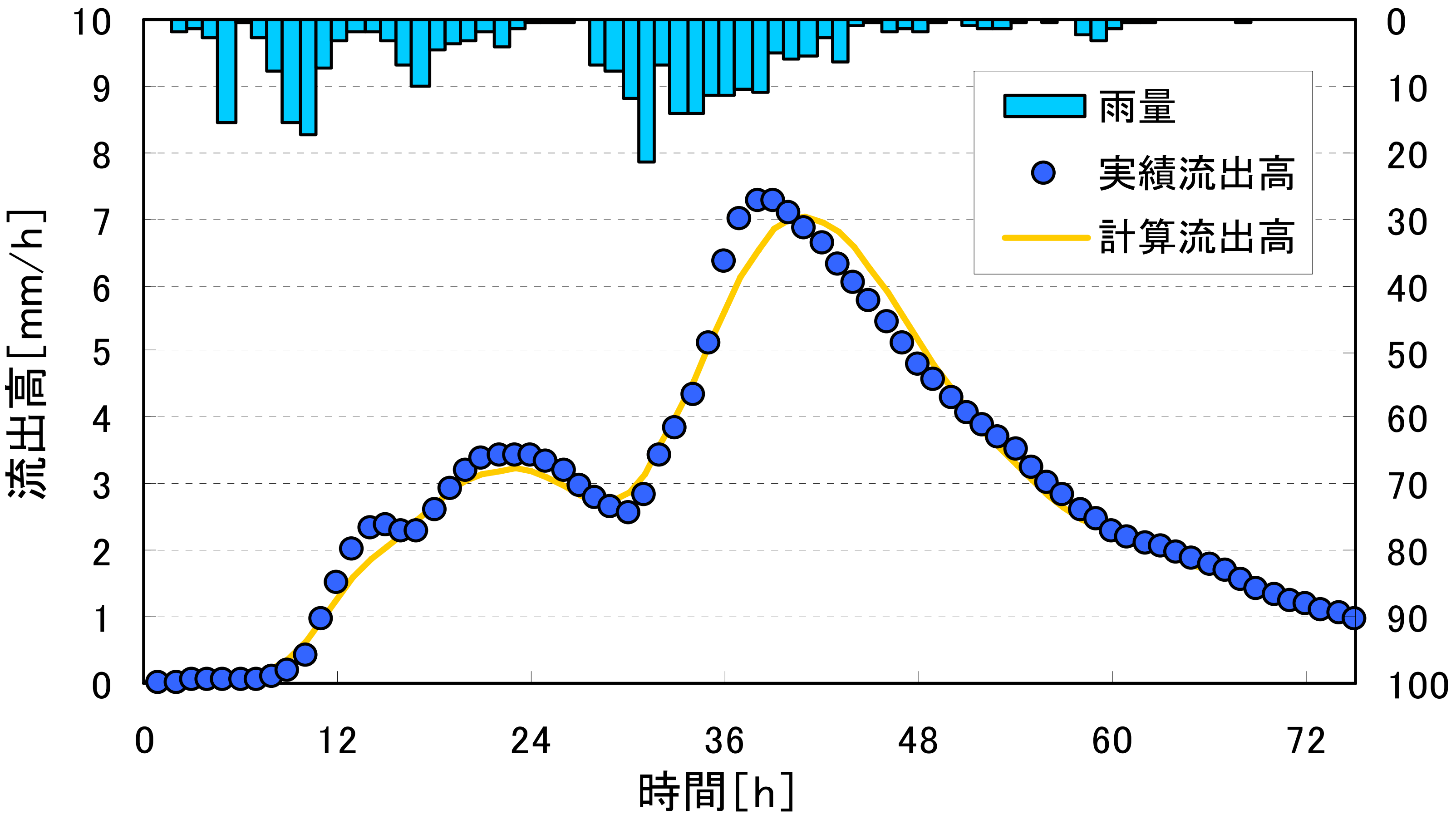
k_{11}, k_{12} : 貯留係数
k_{13} :損失係数
A: 流域面積(km^2)
$\bar{r}$: 平均雨量強度(mm/h)
c_{11} , c_{12} , c_{13} :未知定数

流域面積・降雨特性に影響されないパラメータとする

⇩

総合化が可能

解析結果例２

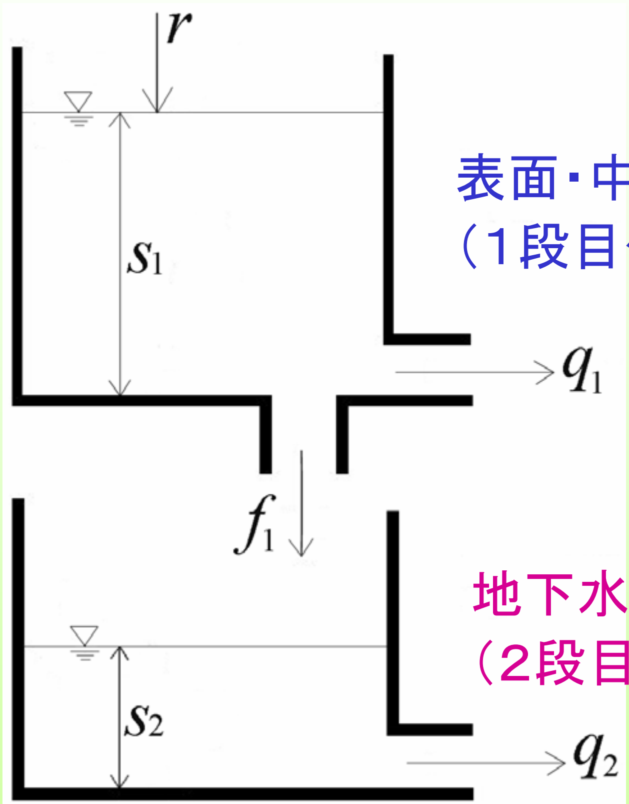


留萌川　峠下観測所　A=51.0km^2　1981年8月5日洪水

c_{11}=16.919　c_{12}=0.1554　c_{13}=1.189

貯留関数モデル（Ⅲ）

２段タンク型貯留関数モデル



表面・中間流出成分
（１段目タンク）

地下水流出成分
（２段目タンク）

$$
\begin{cases}
s_1 = k_{11} q_1^{\,p_1} + k_{12} \dfrac{d}{dt}(q_1^{\,p_2}) \\[2mm]
\dfrac{ds_1}{dt} = r - q_1 - f_1 \\[2mm]
f_1 = k_{13} q_1 = k_{13}(q - q_2)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
p_1 = 0.6 \\
p_2 = 0.4648
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
s_2 = k_{21} q_2 + k_{22} \dfrac{dq_2}{dt} \\[2mm]
\dfrac{ds_2}{dt} = f_1 - q_2
\end{cases}
$$

q_1 :表面・中間流出高(mm/h)、q_2 :地下水流出高(mm/h)
r : 観測雨量(mm/h)、f_1 : 浸透供給量(mm/h)、s_1 , s_2 : 貯留高(mm)
p_1 , p_2 :貯留指数、k_{11}, k_{12} , k_{13} , k_{12} , k_{22} : 貯留係数

モデルパラメータ（上段タンク）

$$\begin{cases} k_{11} = c_{11} A^{0.24} \\ k_{12} = c_{12} k_{11}^{2} (\bar{r})^{-0.2648} \end{cases}$$

$$f_1 = k_{13} q_1$$

$$= k_{13} (q - q_2)$$

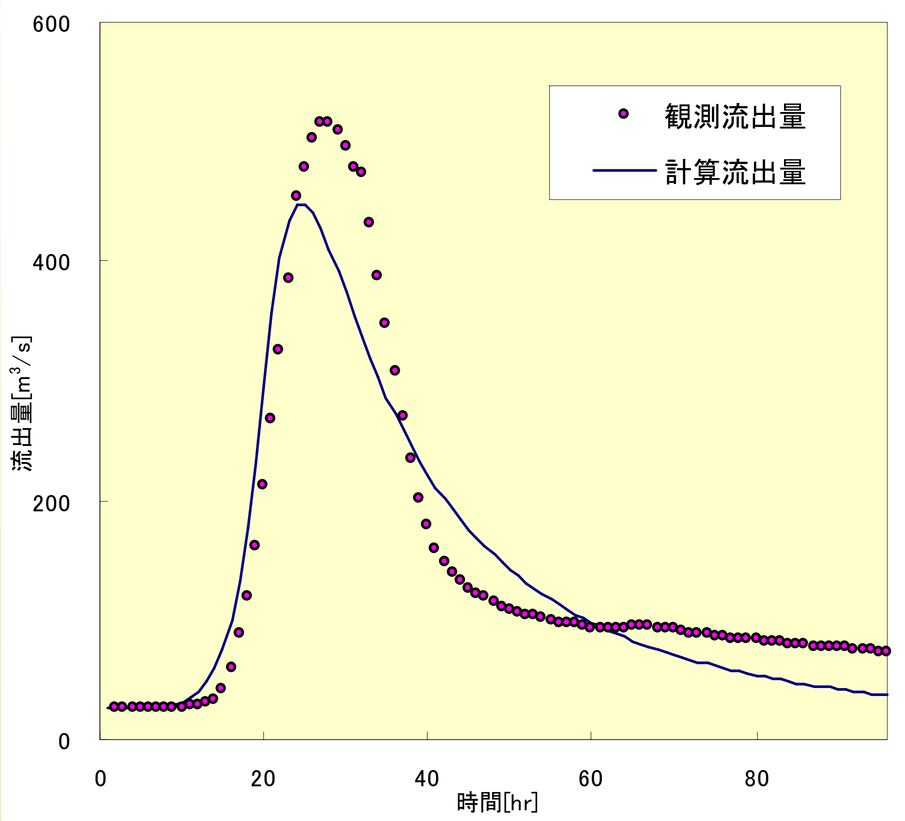
$$c_{13} = k_{13} + 1$$

k_{11}, k_{12}, k_{13}：貯留係数
c_{11}, c_{12}, c_{13}：未知定数
A：流域面積(km^2)
$\bar{r}$：平均雨量強度(mm/h)
f_1：浸透供給量(mm/h)
q：全流出高(mm/h)
q_1：表面・中間流出高(mm/h)
q_2：地下水流出高(mm/h)

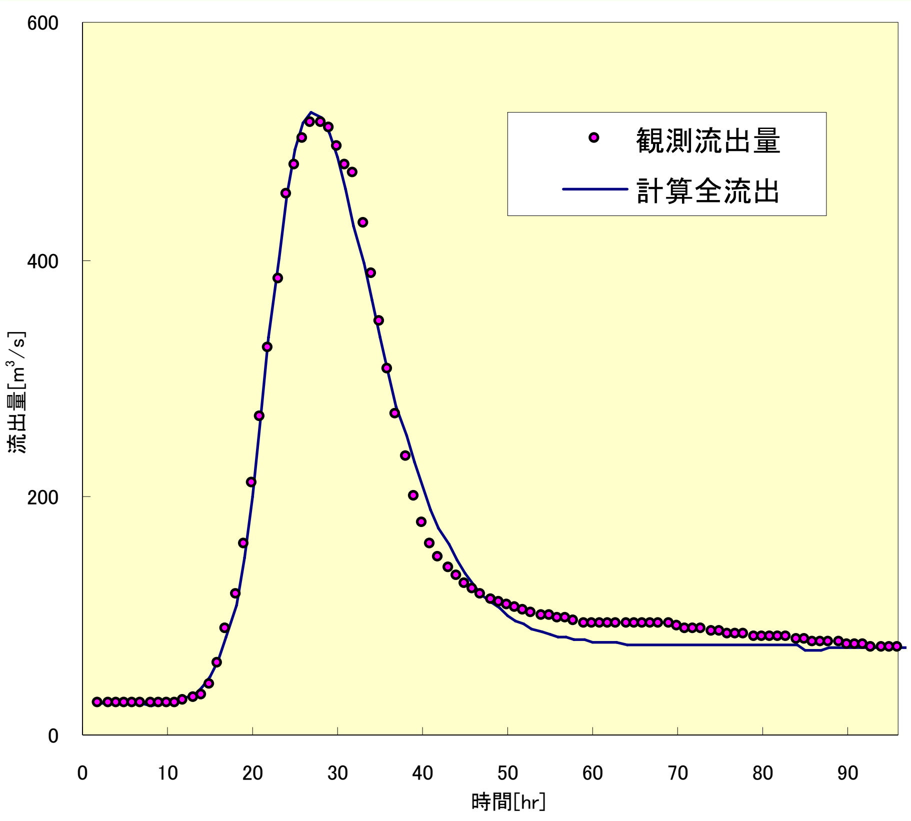
浸透供給量 f_1 は、浸透により地下水流出成分（下段タンク）となる雨量成分

再現グラフの比較

2段タンク型モデルにより、洪水再現性が向上



1段タンク型モデル



2段タンク型モデル

数学的最適化手法(1)

(1)目的関数

$$J\left(K\right)=MSE=\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}e_m^2$$

平均二乗誤差
MSE(Mean Squares Error)
の最小化

$$e_m=q_m^*-q_m\left(K\right)$$;誤差項

$$K=\left[k_1 \quad k_2 \quad k_3\right]^T$$;モデル定数ベクトル

q_m^* :観測流量　　$q_m\left(K\right)$:計算流量　　N :標本数

数学的最適化手法(2)

(a)一階ニュートン法

誤差項を1次の項までテーラー展開、$\dfrac{\partial q_m}{\partial K}$ が必要

(b)二階ニュートン法(ベイリー法)

誤差項を2次の項までテーラー展開、$\dfrac{\partial q_m}{\partial K}$ と $\dfrac{\partial^2 q_m}{\partial K^2}$ が必要

(c)ダビドン法

目的関数を2次の項までテーラー展開、$\dfrac{\partial q_m}{\partial K}$ と $\dfrac{\partial^2 q_m}{\partial K^2}$ が必要

(1)システム方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, k_1, k_2, k_3, r) \end{cases}$$

状態変量ベクトル: $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$

モデル定数ベクトル: $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}^T$

システム入力(降雨量): r

$$x_1 = q^{p_2}, \quad x_2 = \frac{d}{dt}(q^{p_2})$$

(2)線形近似解法

$$\frac{dX}{dt} = AX + D$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \quad a_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \qquad d = f_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2$$

(3)一次感度方程式の解法

$$\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c} U_1 \\ \hdashline U_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} 0 & I \\ \hdashline a_1 I & a_2 I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} U_1 \\ \hdashline U_2 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hdashline B_2 \end{array}\right]$$

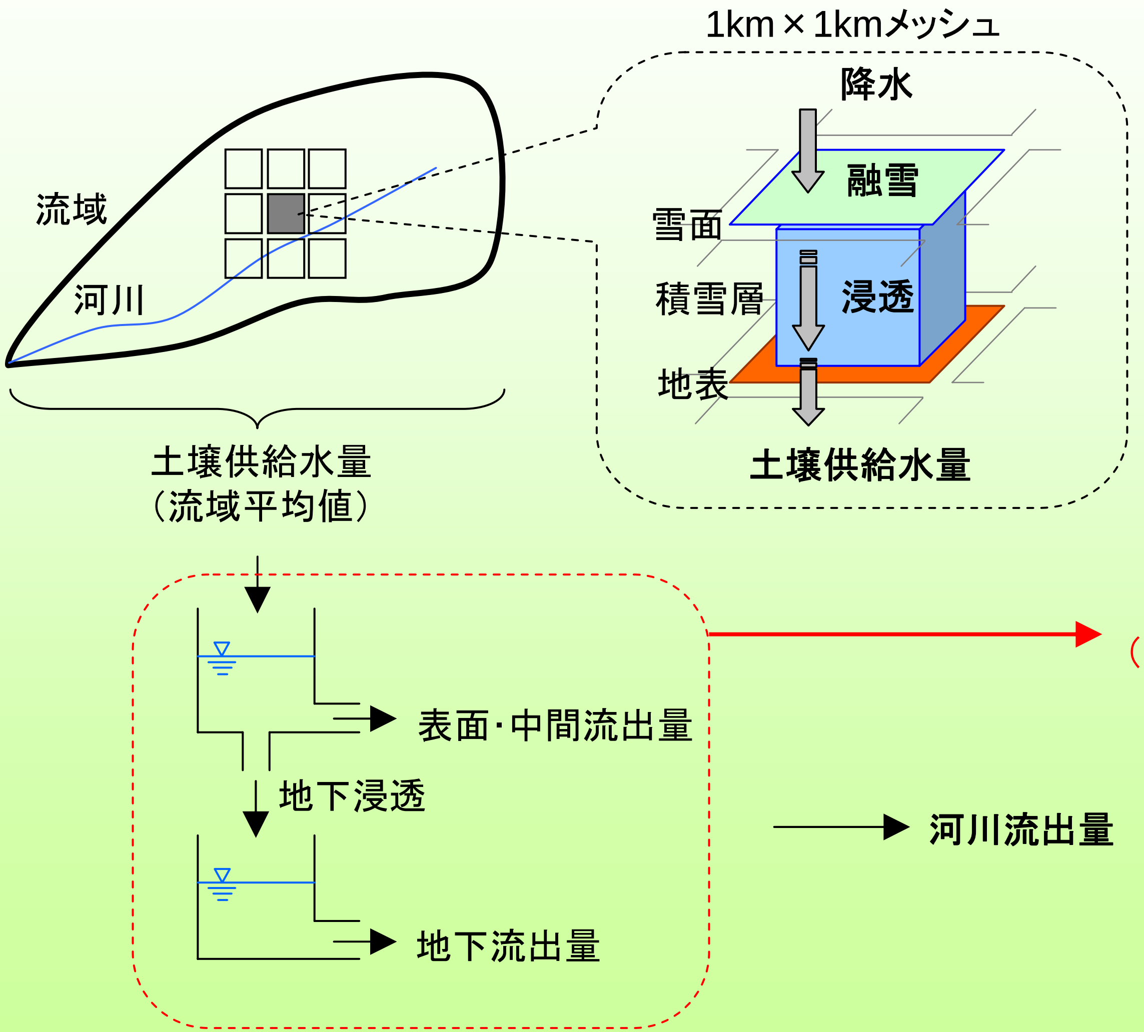
$$U_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial k_1} & \frac{\partial x_1}{\partial k_2} & \frac{\partial x_1}{\partial k_3} \end{bmatrix}^T, \quad U_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial k_1} & \frac{\partial x_2}{\partial k_2} & \frac{\partial x_2}{\partial k_3} \end{bmatrix}^T$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad B_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial k_1} & \frac{\partial f_2}{\partial k_2} & \frac{\partial f_2}{\partial k_3} \end{bmatrix}^T$$

I :[3×3]の単位行列

U_1 :一次感度係数ベクトル(一次導関数ベクトル)

流出ﾓﾃﾞﾙへの入力値の算定方法



融雪モデル
（熱収支法）

積雪浸透モデル
（線形貯留関数法）

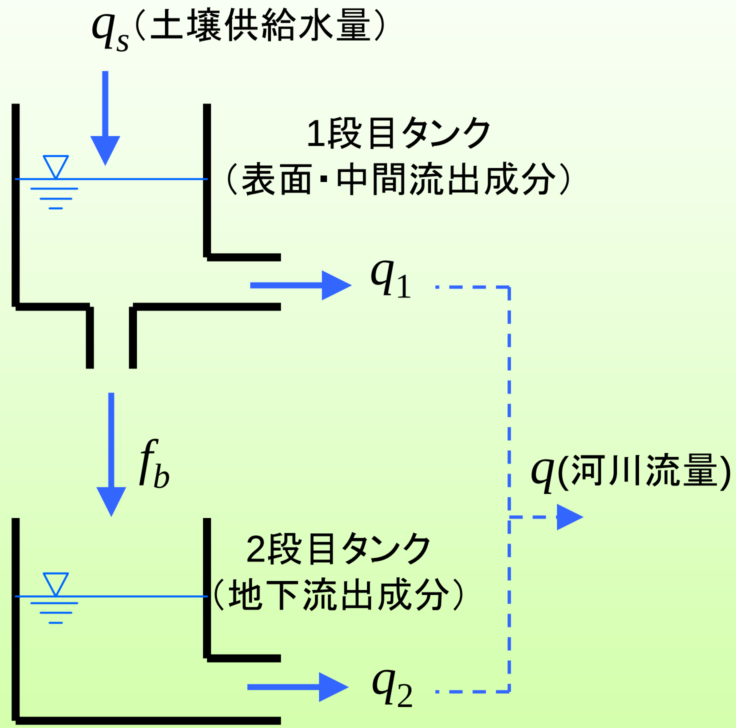
流出モデル
（2段タンク型貯留関数モデル）

2段タンク型貯留関数モデル

◆1段目タンク

$$\begin{cases} s_1 = k_{11} q_1^{\,p_1} + k_{12} \dfrac{d}{dt}\left(q_1^{\,p_2}\right) \\ \dfrac{ds_1}{dt} = q_s - q_1 - f_b \\ f_b = \left(c_3 - 1\right) q_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 = 0.6, p_2 = 0.4648 \\ k_{11} = c_1 A^{0.24}, k_{12} = c_2 k_{11}^{\,2} \left(\overline{q}_s\right)^{-0.2648} \end{cases}$$



◆2段目タンク

$$s_2 = k_{21} q_2 + k_{22} \frac{dq_2}{dt}, \frac{ds_2}{dt} = f_b - q_2$$

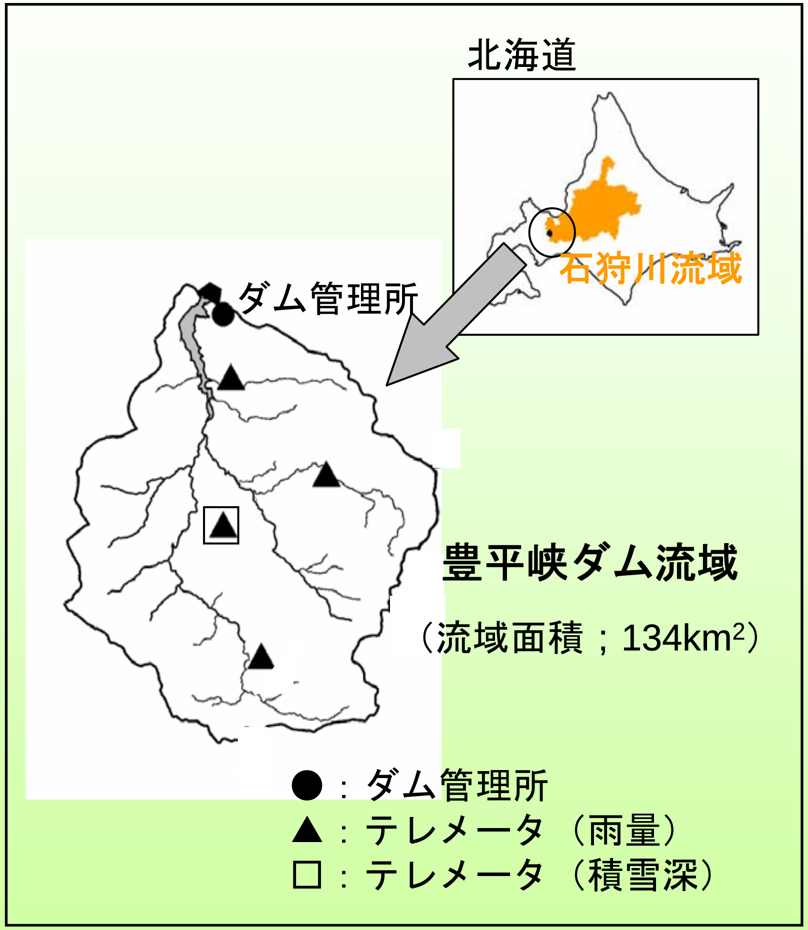
$$k_{21} = 0.0617 c_4 A^{0.4}, k_{22} = 0.4 k_{21}^{\,2}$$

s_1,s_2:1段目,2段目タンクの貯留高(mm), q_1,q_2:表面・中間流出成分,地下流出成分の流出高(mm/h), q_s:土壌供給水量(mm/h), f_b:1段目タンクから2段目タンクへの浸透供給量(mm/h), $k_{11},k_{12},k_{21},k_{22}$:貯留係数, p_1,p_2:貯留指数, A:流域面積(km²), q_s:土壌供給水量の平均強度(mm/h).

未知定数：c_1, c_2, c_3, c_4 →感度係数を解析的に算定し, **Newton-Raphson**法によって最適化.

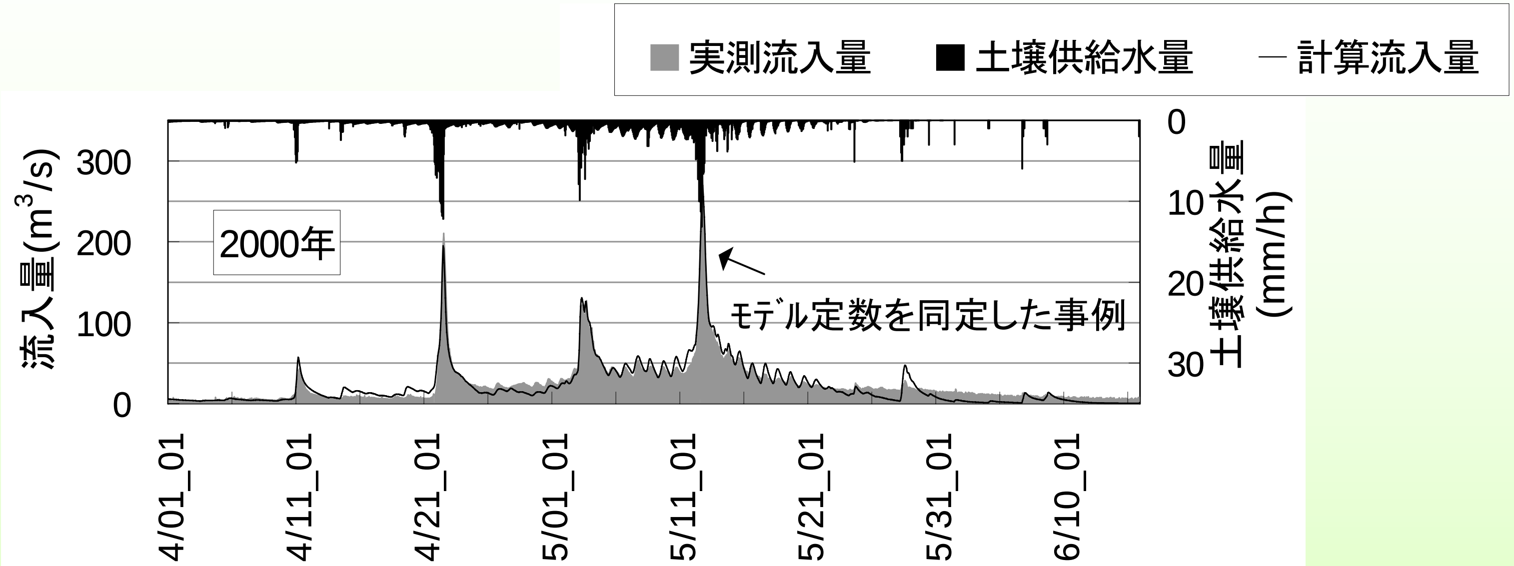
対象流域

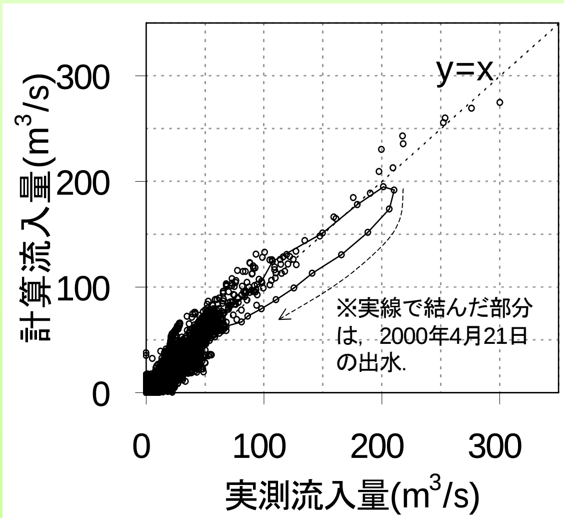
- 豊平峡ダム流域（北海道札幌市）
- 流域の標高分布
  ：400～1,300m，全体の50%は700～900m.
- 積雪期間
  ：11月下旬～翌年5月中旬の約6ヶ月間.
- 融雪に伴う増水期間
  ：4月中旬～5月下旬.
- 降雪量(雨量に換算した値)
  ：約1,000mm．年間降水量の50%程度が降雪.
- 解析期間　：1996年～2000年，4月～6月



◆ダム管理所での気象観測項目◆
気温，湿度，風向風速，積雪深，降水量，現地気圧
（日射量・日照時間：近傍地点の値で代用）

再現結果1





実測流入量と計算流入量の時系列比較
（1996年～2000年）

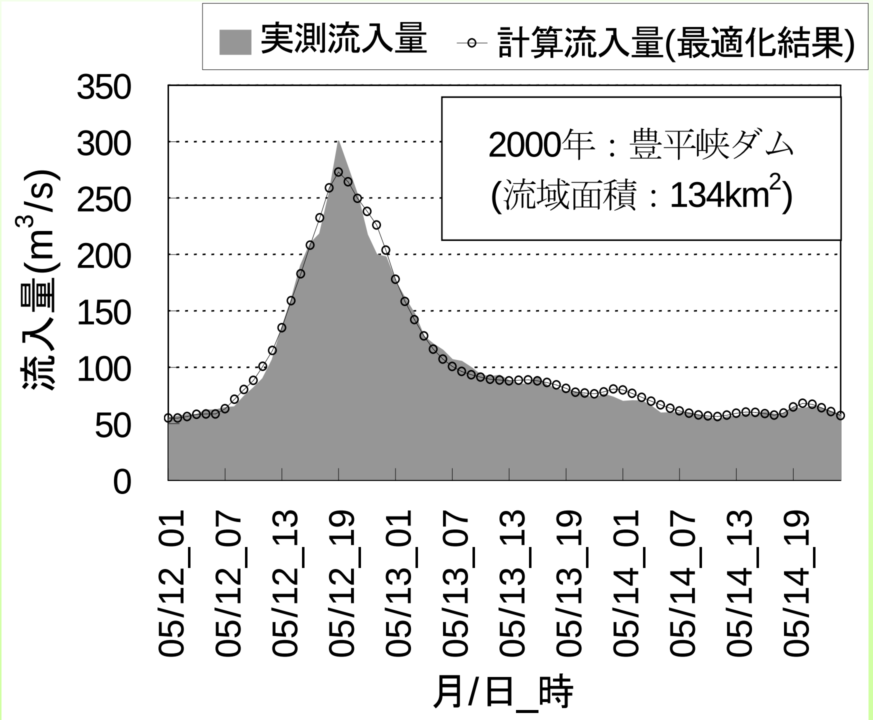
モデル定数の最適化結果

流出モデル定数の探索過程

No	c_1	c_2	c_3	c_4	J(K)
1	5.0000	0.1500	1.5000	100.0000	0.225
2	5.8240	0.1186	1.4001	84.0916	0.085
3	6.4839	0.0812	1.3267	71.0002	0.040
4	6.6233	0.0622	1.3194	64.2785	0.035
5	6.4925	0.0641	1.3392	61.3444	0.035
6	6.4131	0.0690	1.3501	60.2293	0.035
7	6.3948	0.0707	1.3526	59.8259	0.035
8	6.3912	0.0710	1.3531	59.6994	0.035
9	6.3895	0.0710	1.3534	59.6578	0.035
10	**6.3884**	**0.0711**	**1.3535**	**59.6427**	**0.035**

最適モデル定数による再現ハイドログラフ

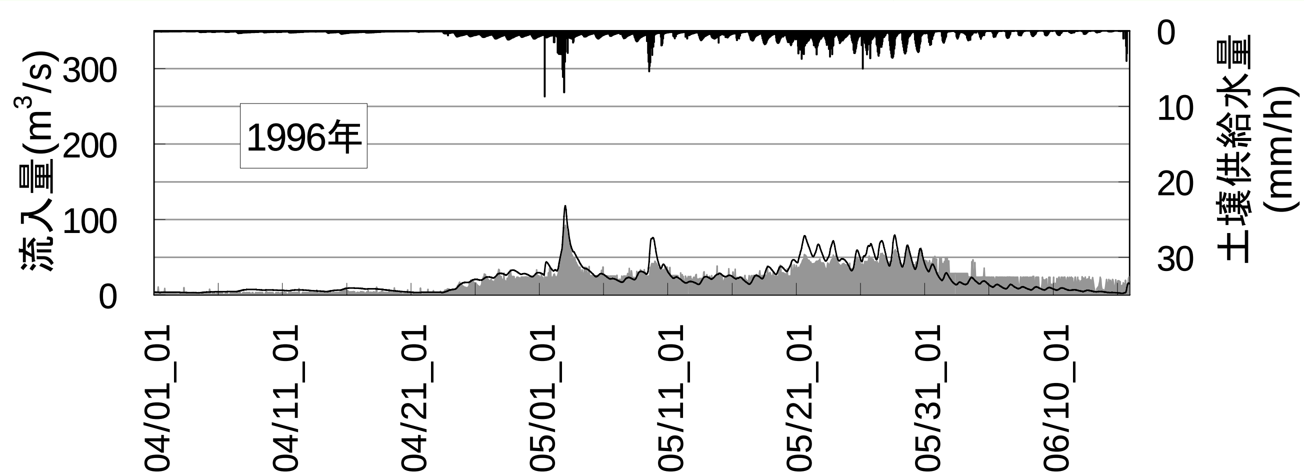
（1996年～2000年の最大の出水）

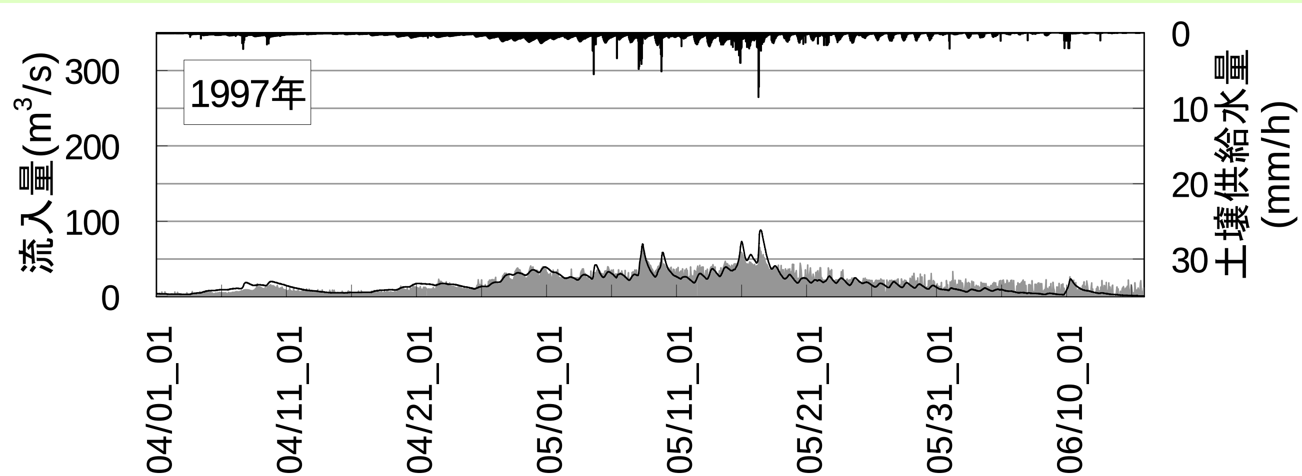


→このﾓﾃﾞﾙ定数を使い5ヵ年のハイドログラフを再現.
（ﾓﾃﾞﾙ定数の代表性の検証）

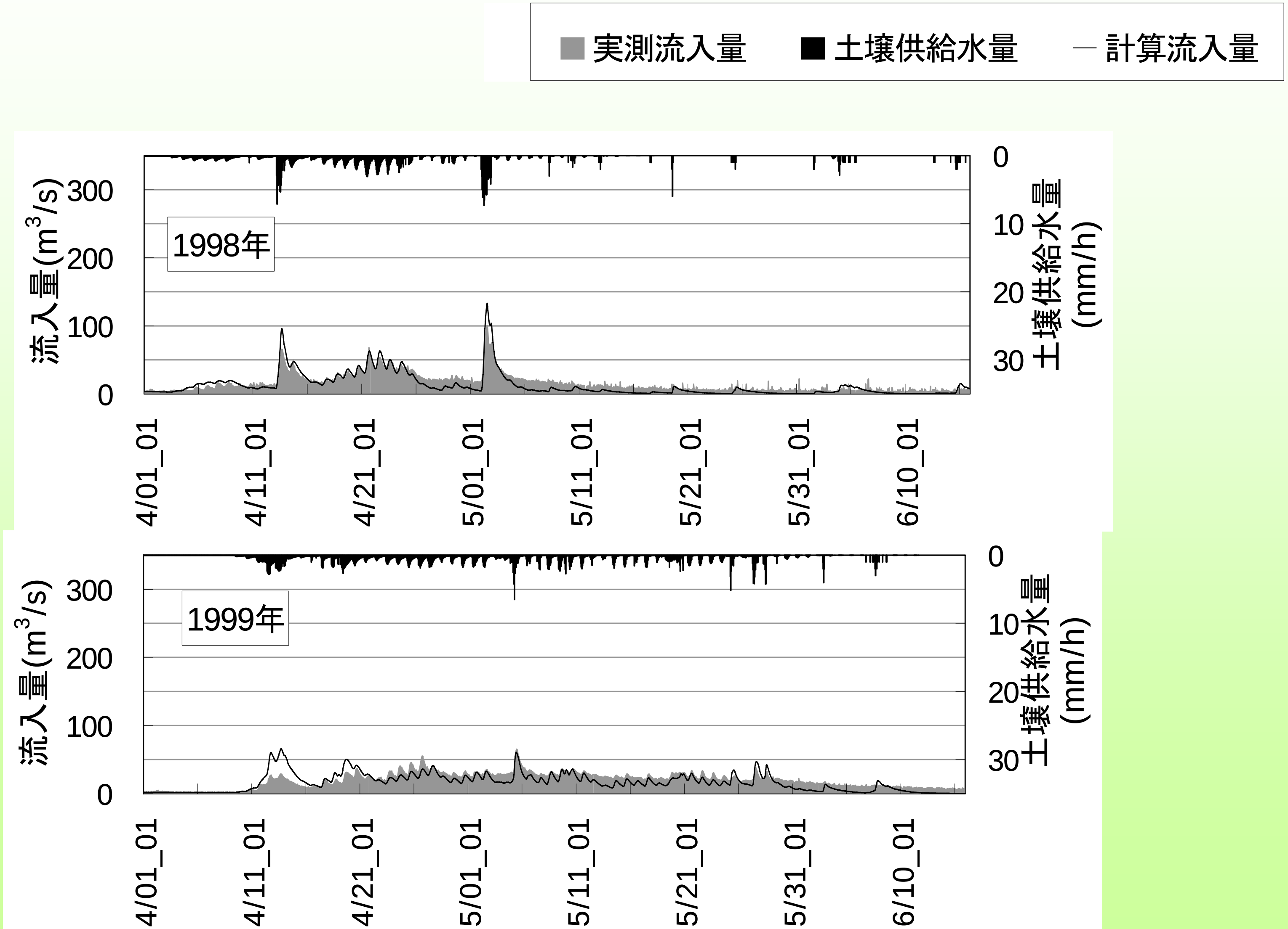
再現結果2

■ 実測流入量　■ 土壌供給水量　― 計算流入量





再現結果3



実測流入量
土壌供給水量
計算流入量
1998年
1999年
流入量(m3/s)
土壌供給水量 (mm/h)
0
100
200
300
10
20
30
4/01_01
4/11_01
4/21_01
5/01_01
5/11_01
5/21_01
5/31_01
6/10_01