現場のための水理学（２）

－般断面における不等流計算－

中津川　誠　　清水康行

2－4 一般断面の不等流計算

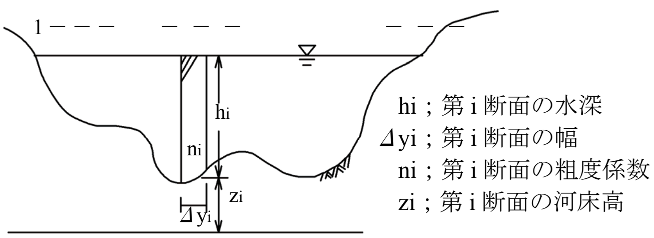
一般の河川は，高水敷があったり，河床でも凹凸があったりして，短形の単断面で表わされるようなものはかなり稀な例といえます。そこで，本節では前節より飛躍して，一般断面の不等流計算法について解説していきたいと思います。

ところで，このように，潤辺に多くの凹凸がある場合でも，用いられる基礎式は先に示した不等流の式と同じような形で，

$$\frac{dH}{dx}+\frac{d}{dx}\left(\alpha\frac{V^2}{2g}\right)+i_e=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.28)$$

と表わすことができます。ただし，第二項目の α は新しくでてきた $\boxed{\text{エネルギー補正係数}}$ というもので，定義づけが必要です。また，平均流速 V やエネルギー勾配 i_e についても凹凸のある前断面の平均値なので，単断面のように簡単にだすことはできません。

そこで，このような断面を図－2.7 のように小さな矩形のブロックに分けて考えることが有効となります。



図－2.7　一般断面形

全断面を幅 Δy で N 個の細かいブロックに分割し，第 i ブロックの諸量について考えると，ここでの断面積は，

$$\Delta a_i=h_i\cdot\Delta y_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.29)$$

ここで，h_i；i ブロックの水深，Δy_i；i ブロックの断面積

また，分担流量は，

$$\Delta q_i=u_i\,\Delta a_i=u_i h_i\,\Delta y_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.30)$$

となります。

ここで，u_i は i ブロックにおける平均流速を表わしており，先に示したマニングの公式から算出できます（式(2.7)参照）

$$u_i=\frac{1}{n_i}r_i^{2/3}i_e^{1/2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.31)$$

上式の中で，r_i は i ブロックの径深であり，断面積を潤辺で除して求められますが，図－2.7 で表わされるように，ブロック分けした細かい短形断面の潤辺は，断面幅 Δy_i に近似できることが一見してわかることから，

$$r_i\fallingdotseq\Delta a_i/\Delta y_i=h_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.32)$$

となることがわかります。これを式(2.31)に代入すると，

$$u_i=\frac{1}{n_i}r_i^{2/3}i_e^{1/2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.33)$$

となります。

なお，n_i は i ブロックのマニングの粗度係数，i_e はエネルギー勾配を表わしています。

ゆえに，式(2.30)は，

$$\Delta q_i=\left(\frac{1}{n_i}h_i^{2/3}i_e^{1/2}\right)\left(h_i\varDelta y_i\right)=\left(\frac{1}{n_i}h_i^{5/3}\varDelta y_i\right)i_e^{1/2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.34)$$

ところで，上式の総和が断面における全流量となることから，

$$Q=\sum_{i=1}^{N}\varDelta q_i=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{n_i}h_i^{5/3}\varDelta y_i\right)i_e^{1/2} \quad \cdots\cdots (2.34)$$

となります。ここで，エネルギー勾配 i_e は，断面のいたるところで近似的に一定とみなせることから，上式より，

$$i_e=\frac{Q^2}{\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{n_i}h_i^{5/3}\varDelta yi\right)^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.36)$$

と表わすことができます。

また，新たにでてきたエネルギー補正係数

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i^3 \triangle ai}{V^3 A} = \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i^3 \triangle ai}{\left(Q^3 / A^2\right)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.37)$$

ここで，u_i；i ブロック平均流速

Δa_i；i ブロック断面積

V；全断面平均流速　A；全断面積

と表わされることがわかっており，これを諸量の定義に従って書き改めると，

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{ni} h_i^{2/3} i_e^{1/2} \right)^3 h_i \triangle yi}{\left\{ \left(\sum_{i=i}^{N} \frac{1}{n_i} h_i^{5/3} \triangle y_i i_e^{1/2} \right)^3 / A^2 \right\}} = \frac{A^2 \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{n_i^3} h_i^3 \triangle yi \right)}{\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{n_i} h_i^{5/3} \triangle yi \right)^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.38)$$

となります。

ゆえに，式(2.28)は式(2.36)，(2.38)などにより，

$$\frac{dH}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\alpha \frac{V^2}{2g} \right) + i_e$$

$$= \frac{dH}{dx} + \frac{1}{2g}\frac{d}{dx}\left[\frac{A^2 \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{n_i^3} h_i^3 \Delta y_i \right)}{\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{n_i} h_i^{5/3} \Delta y_i \right)^3} \right] \cdot \frac{Q^2}{A^2}$$

$$+ \frac{Q^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{n_i} h_i^{5/3} \Delta y_i \right)^2} = \frac{dH}{dx} + \frac{1}{2g}\frac{d}{dx} \cdot$$

$$\left[\frac{A^2 \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{n_i^3} h_i^3 \Delta y_i \right)}{\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{n_i} h_i^{5/3} \Delta y_i \right)^3} \right] + \frac{Q^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{n_i} h_i^{5/3} \Delta y_i \right)^2} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.39)$$

となるわけです。

一見複雑でむずかしそうな式ですが，根底には不等流の基礎式(2.28)があることを念頭において下さい。また式(2.39)が、一般断面における不等流計算の基礎式となるので，しっかり使えるようにしておきましょう。なお，先にでてきたエネルギー補正係数 α の意味について詳しく知りたい方は，他の水理学解説書を参照して下さい。

それでは，以上で得られた式を使って実際の計算に取組んで見ましょう。まず，その前に例によって基礎式(2.39)を差分表示して，計算の出来る形に書き換えておきます。ただし，上流側断面を 1，下流側断面を 2 として，各々の諸量に添字としてそれらの番号を付すとします。

$$\left[H_2 + \frac{Q^2 \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{n_{2i}^3} h_{2i}^3 \triangle y2i \right)}{2g\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{n2i} h_{1i}^{5/3} \triangle 2i \right)^3} + \frac{\triangle x}{2} \frac{Q^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{n2i} h_{1i}^{5/3} \triangle yi \right)^2} \right]$$

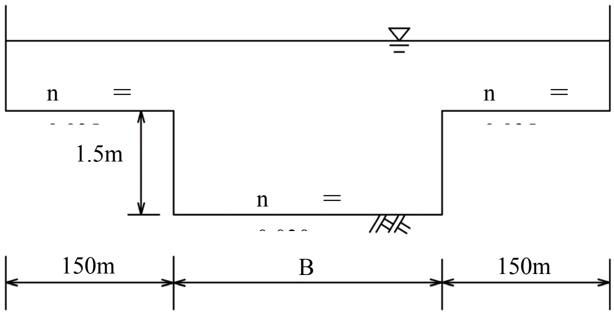
$$= \left[H_1 + \frac{Q^2 \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{n2i} h_{1i}^3 \triangle yi \right)}{2g\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{n1i} h_{1i}^{5/3} \triangle y1i \right)^3} - \frac{\triangle x}{2} \frac{Q^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{n1i} h_{1i}^{5/3} \triangle y1i \right)^2} \right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.40)$$

これで準備は整いました。以後は，各自が演習問題をとおして実践力を養っていって下さい。

（演習問題 4）

図－2.8 に示すように複断面河川において，流量 Q＝1500m^3/s が流下した場合の水面形および分担流量を求めよ。ただし，低水路幅，低水路の河床高および計算断面の断面間隔は表－2.11 に示されるものとする。また，下流端の低水路の水深は 2.5m とする。



図－2.8　演習問題における断面形

表－2.11　演習問題における河道諸元

図面番号	下流端からの距離 (m)	河床高(標高) z(m)	河　幅 B(m)
1	0	0	300
2	500	0.5	320
3	1000	0.9	280
4	1200	0.8	250
5	1800	2.0	300
6	2100	2.3	300
7	2500	3.0	320
8	3000	3.0	350
9	3300	3.5	300
10	3800	4.0	250

〔演習問題 4 の解答(緩和係数法)〕

(1)　考　え　方

基本式は式(2.40)であり，これを便宜上，下記のように表わす。

$$H_2 + AA\frac{\varphi(h_2)}{\{\varphi(h_2)\}^3} + BB\frac{1}{\{\varphi h_1\}^2}$$

$$= H_1 + AA\frac{\varphi(h_1)}{\{\varphi(h_1)\}^3} - BB\frac{1}{\{\varphi(h_1)\}^2} \cdots\cdots\cdots ①$$

ただし，

$$AA = Q^2/2g \cdots\cdots\cdots ②$$

$$BB = \frac{Q^2 \triangle x}{2} \cdots\cdots\cdots ③$$

$$\varphi(h) = \sum_{i=1}^{N}\frac{h_{(i)}^3}{n_{(i)}^3}\triangle y(i) \cdots\cdots\cdots ④$$

$$\varphi(h) = \sum_{i=1}^{N}\frac{h_{(i)}^{5/3}}{n(i)}\triangle y(i) \cdots\cdots\cdots ⑤$$

常流なので，下流から上流に向かって計算を行う。すなわち，下流側水深 h_2 を既知とし，①式を満たすような上流側水深 h_1 を求めればよい。今，①式の左辺を $F2$，右辺を $F1$ とおくことにすると，$F2=F1$ を満たすような h_1 を求めればよいことになる。

解答では，緩和係数法による解法を示す。

緩和係数法とは，$F=F2-F1$ として，$|F|<\varepsilon$ (打切り誤差)となるような h_1 を求める方法の１つであるが，その手順を以下に示す。

i）h_1 になんらかの仮定値を代入し，$F=F2-F1$ の F を計算 ($F2$ は①式の左辺，F は①式の右辺)。

ii）$|F|>\varepsilon$ のとき，$h_1=h_1+\beta F$ によって h_1 を更新する。このときの β を緩和係数と称し，$0.1 \leqq \beta \leqq 1.5$ くらいの値をとる。

iii）更新した h_1 をもって F を計算する。

iv）$|F|<\varepsilon$ となるまで上記の手順を繰返す。

緩和係数法は更新時の計算式が簡単なので，１回当たりの計算は短かくなるという利点はあるが β に適当な値を与えないと繰返し回数が増え，かえって時間がかかる場合もあるので注意を要する。なお，経験上 β は 0.8 程度がよいようである。

(2)　実際の計算

(1)で示した考え方をもとに，以下に 1 断面目を例に計算の過程を示す。

i）流量 Q=1500m^3/s，重力加速度度 g=9.8m/s^2，下流側水深(左岸高水敷 $h_2(1)$＝1.0m，低水路 $h_2(2)$＝2.5m，右岸高水敷 $h_2(3)$＝1.0m)，粗度係数(左岸高水敷 $n(1)$＝1.0，低水路 $n(2)$＝0.03，右岸高水敷 $n(3)$＝0.035，下流側河幅(左岸高水敷 $B_2(1)$＝150m，低水路 $B_2(2)$＝300m，右岸高水敷 $B_2(3)$＝150m)，上流側幅（左右岸高水敷 $B_1(1)$，$B_1(3)$ は $B_2(1)$，$B_2(3)$ と同じ，低水路 $B_1(2)$＝300m)，下流側河床高 z_2＝0m，上流側河床高 z_1＝0.5m(河床高は低水路のもの)，断面間距離 Δx=500m といった諸条件設定。

ii）上流水深を以下のように仮定する。

左岸高水敷 $h_1(1)=h_2(1)=1.0$

低　水　路 $h_1(2)=h_2(2)=2.5$

右岸高水敷 $h_1(3)=h_2(3)=1.0$

iii）$F2$ の計算を行う（①式の左辺)。

$$④式より\ \varphi(h_2) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\{h_2(i)\}^3}{\{n_2(i)\}^3}B_2(i) = 0.1806\times10^9$$

$$⑤式より\ \varphi(h_2) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\{h_2(i)\}^{5/3}}{n_2(i)}B_2(i) = 0.5462\times10^5$$

$$F2 = H_2 + \frac{Q_2}{2g}\frac{\varphi(h_2)}{\{\varphi(h_2)\}^3} + \frac{Q^2\triangle x}{2}\cdot\frac{1}{\{\varphi(h_2)\}^2} = 2.816$$

ただし，H_2 は下流側の水位であり $H_2=h_2(2)+z_2$，z_2 は低水路の河床高。

iv）下流側断面の分担流量 $\Delta q_2(1)$～$\Delta q_2(3)$ を計算。

i 測線の分担流量 $\Delta q_{(i)}$は式(2.34)より，

$$\triangle q_{(i)} = \frac{1}{n(i)}\triangle y(i) h_{(i)}^{5/3} i_e^{1/2}$$

エネルギー勾配 i_e は式(2.36)より計算できる。

したがって，

$\Delta q_2(1)$＝117.692 m^3/s

$\Delta q_2(2)$＝1264.620 m^3/s

$\Delta q_2(3)$＝117.692 m^3/s

v）$h_1(1)$～$h_1(3)$ の仮定値をもとに $F1$ の計算を行なう（①式の右辺)。

④式より $\varphi(h_1)=0.1922\times10^9$

⑤式より $\varphi(h_1)=0.5769\times10^5$

$$F1 = H_! + \frac{Q^2}{2g}\frac{\varphi(h_1)}{\{\varphi(h_1)\}^3} - \frac{Q^2\triangle x}{2}\frac{1}{\{\varphi(h_1)\}^2} = 2.946$$

ただし，H_1 は下流側の水位であり $H_1=h_1(2)+z_1$，z_1 は低水路の河床高。

vi）F の計算

$F=F2-F1$=2.816－2.946=－0.130

vii）打切り誤差を ε=0.001 とし，$|F|>\varepsilon$ ならば，水

深を以下のようらに更新。なお，緩和係数 β は0.7とした。

左岸高水敷　$h_1(1)=h_1(1)+\beta F=1.0+0.7\times(-0.130)=0.909$

低　水　路　$h_1(2)=h_1(2)+\beta F=2.5+0.7\times(-0.130)=2.409$

右岸高水敷　$h_1(3)=h_1(3)+\beta F=1.0+0.7\times(-0.130)=0.909$

ⅷ) ⅶ) の更新値 $h_1(1)\sim h_1(3)$ をもって $F1$ を計算し，F を求める。

ⅸ）$|F|<\varepsilon$ となるまでⅶ)，ⅷ）に示すような手順を繰返す。$|F|<\varepsilon$ となったときの $h_1(1)\sim h_1(3)$ が正解である。

この正解値は，

左岸高水敷　$h_1(1)=0.888\text{m}$

低　水　路　$h_1(2)=2.388\text{m}$

右岸高水敷　$h_1(3)=0.888\text{m}$

さらに，これらをもってⅳ）のように分担流量を求めると，

左岸高水敷　$\Delta q_1(1)=100\text{m}^3/\text{s}$

低　水　路　$\Delta q_1(2)=1299\text{m}^3/\text{s}$

右岸高水敷　$\Delta q_1(3)=100\text{m}^3/\text{s}$

なお，収束にいたるまでの計算の経緯を表－2.12 に示す。

(3)　計算機プログラムの概要

後述の補遺〔4〕参照。

(4)　計　算　結　果

結果を表－2.13 および表－2.14 に示す。表中の H は水位，$H1$ が右岸高水敷水深，$H2$ が低水路水深，$H3$ が左岸高水敷水深，また，$Q1$ が右岸高水敷分担流量，$Q2$ が低水路分流量，$Q3$ が左岸高水敷分担流量を表わすものである。

以上，解答作成者　渡辺和好

表－2.12　計算の経緯　　$\varepsilon=0.0001$

回　数	左岸高水敷 $h_1(1)$	低　水　路 $h_1(2)$	右岸高水敷 $h_1(3)$	誤　差 F	判　定
1	1.000	2.500	1.000	－0.13013	$\|F\|>\varepsilon$
2	0.909	2.409	0.909	－0.002476	$\|F\|>\varepsilon$
3	0.892	2.392	0.892	－0.00433	$\|F\|>\varepsilon$
4	0.889	2.389	0.889	－0.00073	$\|F\|>\varepsilon$
5	0.888	2.388	0.888	－0.00013	$\|F\|>\varepsilon$
6	0.888	2.388	0.888	－0.00002	$\|F\|<\varepsilon$

表－2.13　計算結果（水位，水深）

No.	水　位 H(m)	右岸高水敷 水　深 $H1$(m)	低水路水深 $H2$(m)	左岸高水敷 水　深 $H3$(m)	収 束 回 数 NN(回)	誤　差 F
1	2.500	1.000	2.500	1.000	0	0.00000
2	2.888	0.888	2.388	0.888	6	－0.00002
3	3.311	0.911	2.411	0.911	4	0.00008
4	3.510	1.210	2.710	1.210	9	0.00004
5	4.104	0.604	2.104	0.604	5	0.00009
6	4.550	0.750	2.250	0.750	7	0.00003
7	5.053	0.553	2.053	0.553	5	－0.00003
8	5.668	1.168	2.668	1.168	7	0.00009
9	5.812	0.812	2.312	0.812	8	－0.00003
10	6.358	0.858	2.358	0.858	4	0.00002

表－2.14　計算結果（分担流量）

No.	右岸高水敷 流　　量 $Q1$(㎥/s)	低水路流量 $Q2$(㎥/s)	左岸高水敷 流　　量 $Q3$(㎥/s)
1	117.692	1264.620	117.692
2	100.374	1299.250	100.374
3	115.154	1269.690	115.154
4	158.612	1182.780	158.612
5	72.562	1354.880	72.562
6	90.555	1318.890	90.555
7	62.124	1375.750	62.124
8	117.302	1265.400	117.302
9	97.782	1304.440	97.782
10	120.171	1259.660	120.171

〔演習問題 4 の解答(ニュートン法)〕

(1)　考　え　方

基礎式は式(2.40)であるが，便宜上これを水位の関数で表わすこととする。すなわち，水深 h は $h_1=H-z_1$ として表わし，

$$H_2+\frac{Q^2}{2g}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{N}\frac{\{H_2-z_2(i)\}^3}{n(i)^3}\triangle y_2(i)}{\left\{\sum_{i=1}^{N}\frac{\{H_2-z_2(i)\}^{5/3}}{n(i)}\triangle y_2(i)\right\}^3}+\frac{\triangle x}{2}\frac{Q^2}{\left\{\sum_{i=1}^{N}\frac{\{H_2-z_2(i)^{5/3}\}}{n(i)}\triangle y_2(i)\right\}^2}$$

$$=H_1+\frac{Q^2}{2g}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{N}\frac{\{H_1-z_1(i)\}^3}{n(i)^3}\triangle y_1(i)}{\left\{\sum_{i=1}^{N}\frac{\{H_1-z_1(i)\}^{5/3}}{n(i)}\triangle y_1(i)\right\}^3}-\frac{\triangle x}{2}\frac{Q^2}{\left\{\sum_{i=1}^{N}\frac{\{H_1-z_1(i)\}^{5/3}}{n(i)}\triangle y_1(i)\right\}^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

常流なので，下流側水位 h_2 が既知で，上流側水位 h_1 について解く。①式を書改めると次式が得られる。

$$f(H_1)=H_1+AA\frac{\varphi(H_1)}{\{\phi(H_1)\}^3}-BB\frac{1}{\{\phi(H_1)\}^2}-CC$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

ただし，

$$\varphi(H)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\{H-z(i)\}^3}{n(i)^3}\triangle y(i)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

$$\phi(H)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\{H-z(i)\}^{5/3}}{n(i)}\triangle y(i)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

$$AA=Q^2/2g\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

$$BB=\Delta x\cdot Q^2/2\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑥$$

$$CC=H_2+AA\frac{\varphi(H_2)}{\{\varphi(H_2)\}^3}+BB\frac{1}{\{\varphi(H_2)\}^2}\quad\cdots\cdots⑦$$

解答 2 では，ニュートン法による解法を示す。

ニュートン法の手法については，前掲の演習問題で解説してあるので参照されたいが，本問の場合，①式の左辺と右辺を等しくする。すなわち，②式の $f(H_1)$ を 0 とするような H_1 を求めるための手順は，方法としてはまったく同様であるが，計算が多少複雑になっている。

以下に手順を示す。

ⅰ）②式の H_1 になんらかの仮定値を代入する。ここでは，$H_1=H_2+(z_1-z_2)$ として与える方がより真値に近いであろう。

ⅱ）$f(H_1)>\varepsilon$ (打切り誤差)のとき，$H_1+\Delta H_1$ なる更新を行う。ここで，ΔH_1 は，

$f(H_1+\Delta H_1)\fallingdotseq f(H_1)+f'(H_1)\cdot\Delta H_1=0$ より，

$$\Delta H_1=-f(H_1)/f'(H_1)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑧$$

ここで，$f(H_1)$，$f'(H_1)$ は，

$$f(H_1)=H_1+AA\frac{\varphi(H_1)}{\{\phi(H_1)\}^3}-BB\frac{1}{\{\phi(H_1)\}^2}-CC$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑨$$

$$f'(H_1)=\left[\frac{\varphi(H_1)}{\{\phi(H_1)\}^3}+\ (H_1)\left\{\frac{1}{\{\phi(H_1)\}^3}\right\}'\right]$$

$$-BB\left[\frac{1}{\{\phi H^1\}^2}\right]'\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑩$$

ただし，

$$\varphi(H)=3\sum_{i=1}^{N}\frac{\{H-z(i)\}^2}{n(i)^3}\triangle y(i)[H-z(i)]'$$

$$=3\sum_{i=1}^{N}\frac{\{H-z(i)\}^2}{n(i)^3}\triangle y(i)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑪$$

$$\phi(H)=\frac{5}{3}\sum_{i=1}^{N}\frac{\{H-z(i)\}^{2/3}}{n(i)}\triangle y(i)[H-z(i)]'$$

$$=\frac{5}{3}\sum_{i=1}^{N}\frac{\{H-z(1)\}^{2/3}}{n(i)}\triangle y(i)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots⑫$$

$$\left[\frac{1}{\{\phi(H_1)\}^3}\right]'=\left[\{\phi(H_1)\}^{-3}\right]'=-3\{\phi(H_1)\}^{-4\cdot}\phi(H_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑬$$

$$\left[\frac{1}{\{\phi(H_1)\}^2}\right]'=\left[\{\phi(H_1)\}^{-2}\right]'=-2\{\phi(H_1)\}^{-3}\cdot\ \phi'(H_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑭$$

ⅲ）ⅱ)で更新した H_1 をもって，再度 $f(H_1)$ の計算を行う。

ⅳ）$f(H_1)$ が十分零に近づくまで，すなわち $|f(H_1)|<\varepsilon$ となるまでⅱ)，ⅲ）の手順を繰返す。

(2)　実際の計算

ｉ）諸条件設定，解答 1 の(2)のｉ）と同一，打切り誤差εは0.001

ⅱ）②式の定数AA，BBの計算(⑤式，⑥式)

$$AA=\frac{Q^2}{2g}=\frac{1500^2}{2\times 9.8}=114796$$

$$BB=\frac{\triangle xQ^2}{2}=\frac{500\times 1500^2}{2}=5.625\times 10^8$$

ⅲ）②式の定数CCの計算

③式より，

$$\varphi(H_2)=\sum_{i=1}^{3}\frac{(H_2-z_2(i))^3}{n(i)^3}\triangle y(i)=\frac{1.0^3\times 150}{0.035^3}+\frac{2.5^3\times 300}{0.030^3}+\frac{1.0^3\times 150^{8}}{0.035^3}=1.806\times 10^8$$

④式より，

$$\phi(H_2)=\sum_{i=1}^{3}\frac{(H_2-z_2(i))^{5/3}}{n(i)^3}\triangle y(i)=\frac{1.0^{5/3}\times 150}{0.035^3}\times 2+\frac{2.5^{5/3}\times 300}{0.030}=54622$$

⑦式より，

$$CC=H_2+AA\ \frac{(H_2)}{\{\varphi(H_2)\}^3}+BB\frac{1}{\{\varphi(H_2)\}^2}$$

$$=2.5+114796\times\frac{1.806\times 10^8}{54622^3}+5.625\times 10^8\times\frac{1}{54622^2}=2.816$$

ⅲ）上流側水位H_1仮定。上流側水深h_2と下流側水深h_2が等しいとした仮定値を初期値とする。すなわち$h_1=h_2$より，

$H_1-z_1=H_2-z_2$

よって，$H_1=H_2+(z_1-z_2)=2.5+(0.5-0)=3.0$

ⅳ）②式の$f(H_1)$計算

③式より，

$$\varphi(H_1)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\{H_1-z_1(i)\}^3}{n_1(i)}\triangle y(i)=\frac{1.0^3\times 150}{0.035^3}\times 2+\frac{2.5^3\times 320}{0.030^3}=1.922\times 10^8$$

④式より，

$$\phi(H_1)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\{H_1-z_1(i)\}^{5/3}}{n_1(i)}\triangle y(i)=\frac{1.0^{5/3}\times 150}{0.035}\times 2+\frac{2.5^3\times 320}{0.030}=57692$$

$$f(H_1)=H_1+AA\ \frac{(H_1)}{\{\ (H_1)\}^3}-BB\frac{1}{\{\varphi(H_1)\}^2}-CC$$

$$=3.0+114796\times\frac{1.922\times 10^8}{57692^3}-5.625\times 10^8\times\frac{1}{57692^2}-2.816=0.130$$

ｖ）$|f(H_1)|=0.130>\varepsilon=0.001$なので，$H_1$を更新する。すなわち，更新量$\Delta H_1$は$\Delta H_1=-f(H_1)/f'(H_1)$より，以下の手順で算出する。

⑬式より，

$$\left[\frac{1}{\{\phi(H_1)\}^3}\right]'=-3\{\phi(H_1\}^{-4}\cdot\ \phi'(H_1)=-1.274\times 10^{-14}$$

⑫式より，

$$\left[\frac{1}{\{\phi(H_1)\}^2}\right]'=-2\{\phi(H_1\}^{-3}\cdot\ \phi'(H_1)=-4.899\times 10^{-10}$$

⑪式より，

$$\varphi'(H_1)=2.432\times 10^8$$

よって⑩式より

$$f'(H_1)=1+AA\left[\frac{\varphi(H_1)}{\{\phi(H_1)\}^3}+\phi(H_1)\left\{\frac{1}{\{\phi(H_1)\}^3}\right\}'\right]-BB\left[\frac{1}{\{\phi(H_1)\}^2}\right]'=1+114796\left\{\frac{2.432\times 10^8}{57692^3}+1.922\times 10^8\times(-1.274\times 10^{-14})\right\}-(5.625\times 10^8)\times(-4.899\times 10^{-10})=1.140$$

$$\Delta H_1=-f(H_1)/f'(H_1)=-0.130\div 1.140=-0.114$$

ⅳ）H_1を更新

$H_1=H_1+\Delta H_1=3.0-0.114=2.886$

ⅶ）H_1の更新値をもって再度$f(H_1)$を計算。$|f(H_1)|<\varepsilon$となるまでⅳ）～ⅵ）を繰返す。

$|f(H_1)|<\varepsilon$となったときのH_1が正解。なお，収束までの計算経緯を表－2.15に示す。

表－2.15　計算の経緯

回　数	H_1	$f(H_1)$	判　定
0	水位＝2.886	$f(H_1)=\ 0.130134$	$\lvert f(H_1)\rvert>\varepsilon$
1	水位＝2.888	$f(H_1)=-0.002460$	$\lvert f(H_1)\rvert>\varepsilon$
2	水位＝2.888	$f(H_1)=-0.000001$	$\lvert f(H_1)\rvert<\varepsilon$

表－2.16　計算結果

断　面　No.	水　　　　位	左　岸　流　量	低水路流量	右　岸　流　量	繰返し回数
1	2.500	117.7	1264.6	117.7	0
2	2.888	100.4	1299.3	100.4	3
3	3.311	115.1	1269.7	115.1	2
4	3.510	158.7	1182.7	158.7	2
5	4.104	72.6	1354.9	72.6	4
6	4.550	90.6	1318.9	90.6	3
7	5.053	62.1	1375.8	62.1	3
8	5.668	117.3	1265.5	117.3	3
9	5.812	97.8	1304.4	97.8	3
10	6.358	120.1	1259.8	120.1	2

(3)　計算機プログラム概要

後述の補遺〔5〕参照。

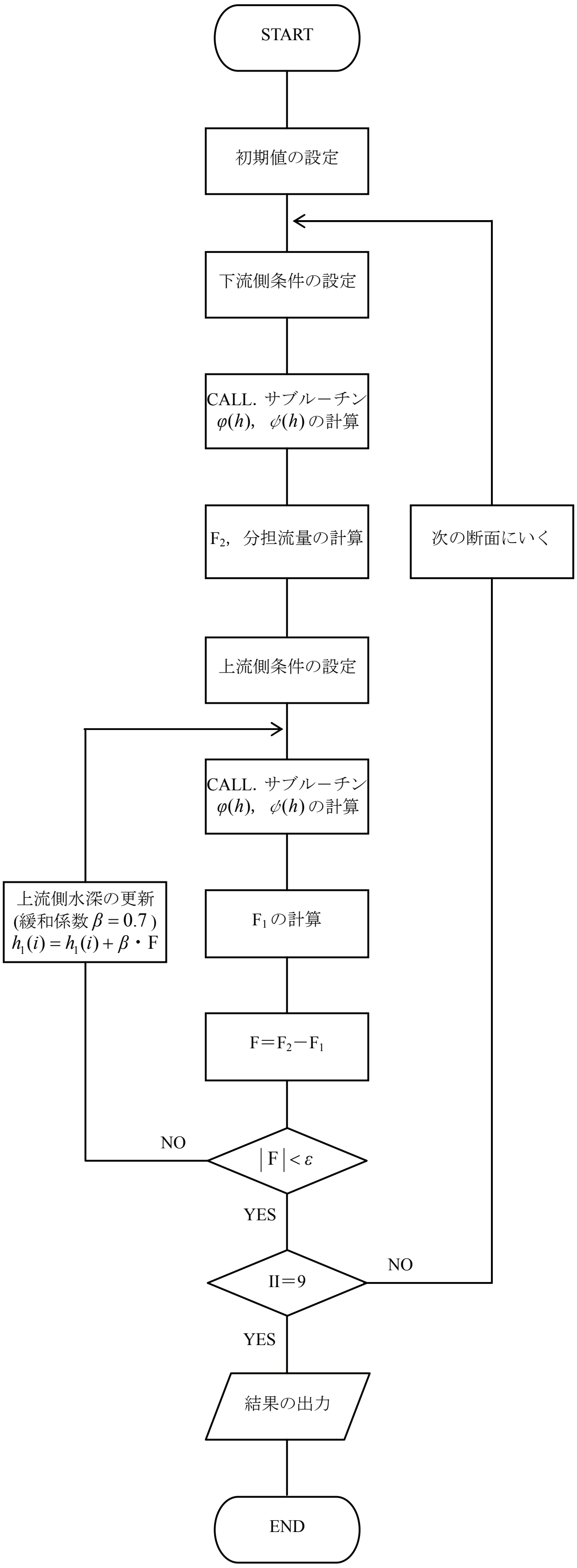
(4)　計　算　結　果

計算結果を表－2.16 に示す。

以上，解答作成者　本間　隆

〔4〕　演習問題 4（緩和係数法）

（1）　プログラムのフローチャート



（2）　プログラムの解説

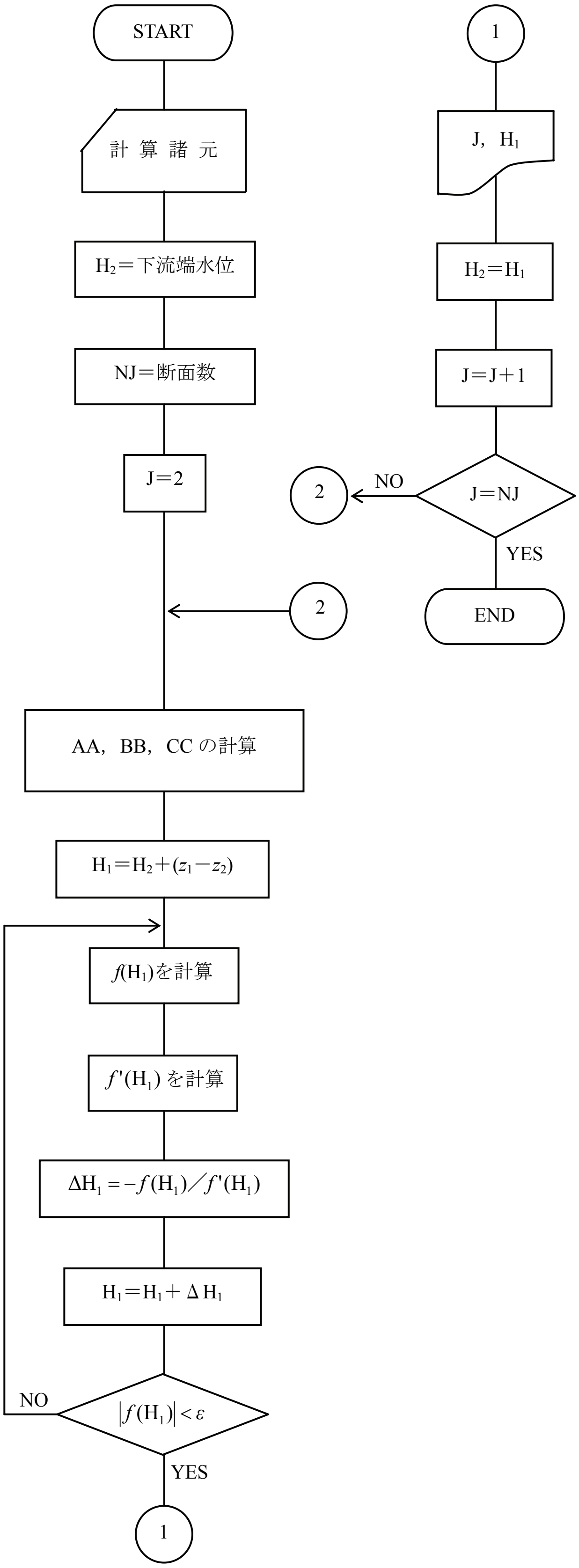
文 番 号	解　　説
40，50	初期値の設定．$H(i)$：水深，Q：流量，$n(i)$：粗度，G：重力加速度．
60～80	$s(i)$，$z(i)$，$B2(i)$の読込み． $s(i)$：断面間距離，$z(i)$：河床高，$B2(i)$：低水路幅．
120～140	上流側水深の設定．
150，160	下流側水深，低水路幅の設定．
170	サブルーチンへいく．
190	$F2$（下流側）の計算．
200，210	分担流量の計算． $Q1(i)$：$Q3(i)$：高水敷流量，$Q2(i)$：低水路流量．
220	上流側の条件設定．
230	サブルーチンへいく．
250	$F1$（上流側）の計算．
290	収束の判断，収束したならば 330 へいく． $F(i)$：誤差．
310	上流側水深の再設定 230 へいく．
330	下流側水深の再設定．
340	分担流量の計算．
370～450	計算結果の出力． No.：断面 No.，H：水位，$H1$～$H3$：水深，NN：繰返し回数，F：誤差．
460～480	デ　ー　タ．
510～550	サブルーチン　④式の $\varphi(h)$，⑤式の $\phi(h)$を計算． $\varphi(h)$は PHI，$\phi(h)$は GAM に相当．

(3)　プログラムのリスト

```
10    ' SAVE "13 : FUKU"
20    ' FUTORYU   KEISAN   PROGRAM
30    DIM   S(10), Z(10), B(5), B2(10), H1(10), H2(10), H3(10), H(5), HH(10) ,
      N(10), NN(10), F(10), Q1(10), Q2(10), Q3(10), QQ(5)
40    H1(1)＝1! : H2(1)＝2.5 : H3(1)＝1!
50    Q＝1500 : N(1)＝.035 : N(2)＝.03 : N(3)＝.035 : G＝9.8 : B(1)＝150 : B(3)＝150
60    FOR   I＝1   TO   9 : READ   S(I) : NEXT   I
70    FOR   I＝1   TO   10 : READ   Z(I) : NEXT   I
80    FOR   I＝1   TO   10 : READ   B2(I) : NEXT   I
90    NN(1)＝0
100   FOR   II＝1   TO   9
110   I＝II
120   H1(I+1)＝H1(I)
130   H2(I+1)＝H2(I)
140   H3(I+1)＝H3(I)
150   H(1)＝H1(I) : H(2)＝H2(I) : H(3)＝H3(I)
170   B(2)＝B2(I)
170   GOSUB   500
180   LPRINT   USING "PHI＝ .####^^^^ GAM＝ .####^^^^";PHI;GAM
190   F1＝H2(I)+Z(I)+Q^2/(2*G)*PHI/GAM^3+S(I)*Q^2/2/GAM^2
200   FOR   J＝1   TO   3 : QQ(J)＝B(J)*Q*H(J)^(5/3)/N(J)/GAM : NEXT   J
210   Q1(I)＝QQ(1) : Q2(I)＝QQ(2) : Q3(I)＝QQ(3)
220   I＝I+1 : B(2)＝B2(I)
230   GOSUB   500
240   NN(I)＝NN(I)+1
250   F2＝H2(I)+Z(I)+Q^2/(2*G)*PHI/GAM^3－S(I－1)*Q^2/2/GAM^2
260   F(I)＝F1－F2
270   LPRINT   USING "NN＝ ###   ";NN(I)
280   LPRINT   USING "F1＝ ###.### F2＝ ###.### F＝ ###.####";F1;F2;F(I)
290   IF   ABS(F(I))<1E－04   GOTO   330
300   FOR   J＝1   TO   3 : H(J)＝H(J)+F(I)*.7 : NEXT   J
310   H2(I)＝H(2)
320   GOTO   230
330   H1(I)＝H(1) : H3(I)＝H(3)
340   FOR   J＝1   TO   3 : QQ(J)＝B(J)*Q*H(J)^(5/3)/N(J)/GAM : NEXT   J
350   Q1(I)＝QQ(I) : Q2(I)＝QQ(2) : Q3(I)＝QQ(3)
360   NEXT   II
370   FOR   I＝1   TO   10 : HH(I)＝H2(I)+Z(I) : NEXT   I
380   LPRINT        "NO     H            H1           H2           H3          NN        F"
390   FOR   I＝1   TO   10
400   LPRINT USING"## ##.###     ##.###     ##.###     ##.###     ###     ##.#####"
      ;I;HH(I);H1(I);H2(I);H3(I);NN(I);F(I)
410   NEXT I
420   LPRINT          "NO          Q1                Q2                Q3"
430   FOR   I＝1   TO   10
440   LPRINT   USING "##      ####.###       ####.###       ####.###"
      ;I;Q1(I);Q2(I);Q3(I)
450   NEXT   I
460   DATA 500, 500, 200, 600, 300, 400, 500, 300, 500
470   DATA 0, 0.5, 0.9, 0.8, 2.0, 2.3, 3.0, 3.0, 3.5, 4.0
480   DATA 300, 320, 280, 250, 300, 300, 320, 350, 300, 250
490   END
500   '
510   PHI＝0 : GAM＝0
520   FOR   J＝1   TO   3
530   PHI＝PHI+H(J)^3/N(J)^3*B(J)
540   GAM＝GAM+H(J)^(5/3)/N(J)*B(J)
550   NEXT   J : RETURN
```

〔5〕演習問題 4(**ニュートン法**)

(1)　プログラムのフローチャート



(2)　プログラムの解説

文 番 号	解　　説
130	NI：横断方向の分割数，NJ：計算断面数.
140	X：下流端からの距離(m)，Y：横断幅(m)，Z：河床高(m)，H：水深(m)，HH：水位(m)，SN：マニングの粗度係数，DQ：分担流量(m^3/s).
150	Q：流量(m^3/s)，G：重力加速度(m/s^2). EPS：打切り誤差ε.
160	下流端水位の設定.
170～230	計算諸元の入力.
250	KK：繰返し計算回数の合計.
260	⑤式の AA を計算.
310	⑥式の BB を計算.
320～330	⑦式の CC を計算.
340	$H1$ の初期値を $H_1=H_2+\Delta z$ で与える.
350	サブルーチン 470 以降で③，④，⑪，⑫，⑬，⑭式の計算.
360	⑨式の $f(H_1)$ を計算
370	⑩式の $f'(H_1)$ を計算
380	⑧式により ΔH_1 の計算
390	前ステップでの H_1 の値に補正値 ΔH_1 を加える.
420	$\lvert f(H_1)\rvert$ が許容誤差 ε 以内かどうか判断.

(3) プログラムのリスト

```
100  '      SAVE"FUTO6"
110  '**********   不等流計算    演習問題（６）    **********
120  DEFINT  I－N
130  NI＝3：NJ＝10
140  DIM X(NJ), Y(NI, NJ), Z(NI, NJ), H(NI, NJ), HH(NJ), SN(NI, NJ), DQ(NI, NJ)
150  Q＝1500：G＝9.8：EPS＝.001
160  HH(1)＝2.5
170  FOR  J＝1  TO  NJ
180    READ  X(J), Y(2, J), Z(2, J)
190    FOR  I＝1  TO  NI
200      IF  I＝2  THEN  SN(I, J)＝.03：GOTO  220
210      SN(I, J)＝.035：Y(I, J)＝150：Z(I, J)＝Z(2, J)+1.5
220    NEXT  I
230  NEXT  J
240  '*****************************************************
245  LPRINT      "断面ＮＯ    水位    左岸流量  低水路流量  右岸流量
     繰り返し回数"
250  KK＝0
260  A＝Qˆ2/(2*G)
270  FOR  J＝2  TO  NJ
280    K＝0
290    JJ＝J－1
300    DX＝X(J)－X(JJ)
310    B＝DX*Qˆ2/2
320    GOSUB  470：IF  JJ＝1  THEN  GOSUB  660
330    C＝HH(JJ)+A*PS/PLˆ3+B/PLˆ2
340    HH(J)＝HH(JJ)+Z(2, J)－Z(2, JJ)
350    JJ＝J：GOSUB  470
360    FH＝HH(J)+A*PS/PLˆ3－B/PLˆ2－C
370    FHD＝1+A*(PSD/PLˆ3+PS*PLD3)－B*PLD2
380    DH＝－FH/FHD
390    HH(J)＝HH(J)+DH
400    K＝K+1  :  KK＝KK+1
410    ' GOSUB  690
420    IF  ABS(FH)>EPS  THEN  350
430    GOSUB  660
440  NEXT J
450    LPRINT：LPRINT：LPRINT "繰り返し回数合計 ＝";KK
460  END
470  '********************************************************
480  PS＝0  :  PL＝0  :  PSD＝0  :  PLD＝0
490  FOR  I＝1  TO  NI
500    H(I, JJ)＝HH(JJ)－Z(I, JJ)
510    IF  H(I, JJ)<0  THEN  H(I, JJ)＝0
520    PS＝PS+H(I, JJ)ˆ3*Y(I, JJ)/SN(I, JJ)ˆ3
530    PL＝PL+H(I, JJ)ˆ(5/3)*Y(I, JJ)/SN(I, JJ)
540  NEXT  I
550  FOR  I＝1  TO  NI
560    DQ(I, JJ)＝Y(I, JJ)*H(I, JJ)ˆ(5/3)*Q/(SN(I, JJ)*PL)
570  NEXT  I
580  IF  JJ<>J  THEN  650
590  FOR  I＝1  TO  NI
600    PSD＝PSD+3*(HH(J)－Z(I, J))ˆ2*Y(I, J)SN(I, J)ˆ3
610    PLD＝PLD+5/3*(HH(J)－Z(I, J))ˆ(2/3)*Y(I, J)SN(I, J)
620  NEXT  I
630  PLD3＝－3*PLˆ(－4)*PLD
640  PLD2＝－2*PLˆ(－3)*PLD
650  RETURN
660  '－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－
670  LPRINT  USING "  ###      ###.###      ####.#      ####.#      ####.#
     ##";JJ;HH(JJ);DQ(1, JJ);DQ(2, JJ);DQ(3, JJ);K
680  RETURN
690  '－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－
700  LPRINT  USING "###断面   ##回目   水位 ＝##.###    f(H) ＝##.######"
     ;JJ;K;HH(J);FH
710  RETURN
720  DATA     0, 300, 0.0
730  DATA   500, 320, 0.5
740  DATA 1000, 280, 0.9
750  DATA 1200, 250, 0.8
760  DATA 1800, 300, 2.0
770  DATA 2100, 300, 2.3
780  DATA 2500, 320, 3.0
790  DATA 3000, 350, 3.0
800  DATA 3300, 300, 3.5
810  DATA 3800, 250, 4.0
```