

現場のための水文学 (4)

— 流出解析 その4 —

若手水文学研究会*

4. 数学的最適化手法

対象流域の降雨流出現象を表す貯留方程式を数学的モデルと考え、そのモデルに含まれるモデル定数を実測資料に基づいて決定(同定)する方法が数学的最適化手法である。

ここでは、数学的最適化手法の概念を理解するためにすでに述べてきた一価と二価の線形貯留方程式をとりあげ、そのモデル定数の最適化を行うことにする。

4-1 一価の線形貯留方程式の最適化

$$\begin{cases} s = k q & \dots\dots\dots (4.1) \\ \frac{ds}{dt} = r - q & \dots\dots\dots (4.2) \end{cases}$$

ここに、 s :貯留量、 r :有効雨量、 q :流出高、 k :モデル定数

ここで、最適化というのは、実測流量(ハイドログラフ)を計算流量に最も適合するようにモデル定数 k を同定することである。計算流量 q を実測流量 q^* にできるだけ近づける目的関数として、実測流量 q^* と計算流量 q の差の2乗和を最小にするという基準が通常用いられている。つまり、

$$\text{Min } J(k) = \sum e_i^2(k) \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

ここに

$$e_i(k) = q_i^* - q_i(k) \quad \dots\dots\dots (4.4)$$

J : 目的関数、 q_i^* : 実測流量、 q_i : 計算流量、 e_i : 実測流量と計算流量の誤差

今、極小点の近くの k を基準として $(k+\Delta k)$ の所での誤差 $e(k+\Delta k)$ を考えてこれを1次の項までテーラー級数展開すると、

$$e(k+\Delta k) = e(k) + \left(\frac{\partial e}{\partial k} \right) \Delta k \quad \dots\dots\dots (4.5)$$

(4.5)式中の $(\partial e / \partial k)$ は、(4.4)式により

$$\frac{\partial e}{\partial k} = - \frac{\partial q}{\partial k} = -u \quad \dots\dots\dots (4.6)$$

ここに、

*星 清(水工部長) 鳥谷部寿人, 金高州吾, 三浦敦禎, 市川嘉輝(河川研究室) 中津川 誠, 谷 昭彦, 山口昌志(環境研究室) 佐伯礼子(北開水工コンサルタント) 白川俊也, 柴田春幸(松木設計事務所)

$$u = \frac{\partial q}{\partial k} \quad \dots\dots\dots (4.7)$$

(4.7)式の $u=\partial q/\partial k$ は、モデル定数 k の出力に及ぼす影響を表す指標であり、感度係数と呼ばれる。

(4.6)、(4.7)式を(4.5)式に代入して再記すれば、

$$e(k+\Delta k) = e(k) - u(k)\Delta k \quad \dots\dots\dots (4.8)$$

したがって $(k+\Delta k)$ での目的関数 J は、次式で近似できる。

$$J(k+\Delta k) = \sum e_i^2(k) - 2(\Delta k) \sum e_i(k) u_i(k) + (\Delta k)^2 \sum u_i^2(k) \quad \dots\dots (4.9)$$

$$\text{ここに、} \quad u_i(k) = \frac{\partial q_i(k)}{\partial k} \quad \dots\dots\dots (4.10)$$

今、 $k^*=k+\Delta k$ でちょうど極小点になるように Δk を決定するためには、次の条件が必要である。

$$\frac{\partial J(k+\Delta k)}{\partial (\Delta k)} = 0 \quad \dots\dots\dots (4.11)$$

すなわち Δk は、次式で計算される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(k+\Delta k)}{\partial (\Delta k)} &= -2 \sum e_i(k) u_i(k) + 2(\Delta k) \sum u_i^2(k) = 0 \\ \Delta k &= \frac{\sum e_i(k) u_i(k)}{\sum u_i^2(k)} \quad \dots\dots\dots (4.12) \end{aligned}$$

(4.12)式の Δk は、モデル定数の補正項であり、もし n 回目の定数値 k_n が既知の場合には Δk_n を(4.12)式にて求め、 $(n+1)$ 回目の k 値を次式で更新する。

$$k_{n+1} = k_n + \Delta k_n \quad \dots\dots\dots (4.13)$$

補正項 Δk_n は、繰返し回数が増すにつれて減少していくことが予想される。したがって、繰返し計算の終了は次の条件によってもよい。

$$|\Delta k_n / k_n| < \varepsilon \quad \dots\dots\dots (4.14)$$

ここに、 ε は収束許容限界値で通常 $10^{-2} \sim 10^{-4}$ に設定する。

前述した最適化手法においては、(4.7)式に示される感度係数を算出する必要がある。この算出方法を以下に述べる。

(4.1)、(4.2)式から次の1階常微分方程式を得る。

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{k} q + \frac{1}{k} r \quad \dots\dots\dots (4.15)$$

(4.15)式を差分式へ変換すると、

$$q_{m+1} = \phi q_m + \gamma x_{m+1} \quad \dots\dots\dots (4.16)$$

ここで、

$$\begin{cases} x_{m+1} = r_{m+1} / k \\ \phi = e^{aT} \\ \gamma = (e^{aT} - 1) a^{-1} \\ a = -1/k \\ T = 1(\text{計算時間間隔}) \end{cases} \dots\dots\dots (4.17)$$

差分式へ変換のしかたは、すでに(3.16)、(3.17)式に示してある。

(4.15)式を定数 k について微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right) = -\frac{1}{k} \frac{\partial q}{\partial k} + \frac{1}{k^2} (q - r) \dots\dots\dots (4.18)$$

(4.18)式においてモデル定数 k が時間的に変化しないと仮定すると、(4.18)式の微分順序を入れ換えることができる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial q}{\partial k} \right) = -\frac{1}{k} \frac{\partial q}{\partial k} + \frac{1}{k^2} (q - r) \dots\dots\dots (4.19)$$

$(\partial q / \partial k)$ は、(4.7)式より感度係数 u であるから、(4.19)式は次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{k} u + \frac{1}{k^2} (q - r) \dots\dots\dots (4.20)$$

(4.20)式は、(4.15)式と式形が全く同一であることから、差分表示すると次のようになる。

$$u_{m+1} = \phi u_m + \gamma d_m \dots\dots\dots (4.21)$$

ここで、

$$d_m = (q_m - r_{m+1}) / k^2 \dots\dots\dots (4.22)$$

ϕ と γ は上述した(4.17)式と同じである。

(4.21)式の解法は(4.16)式のそれに準ずればよく、計算も容易に行える。

すなわち、(4.21)式と(4.16)式を交互に解くことによって、感度係数系列 u_i と計算流量系列 q_i が得られるので、(4.12)式によって Δk も容易に計算できる。

(例題 9)

(例題 4)で用いたモデル定数 $k=9.38$ を初期値として鵜川の洪水例(表 1.2)に一価の貯留方程式をあてはめ最適化を行え。なお、計算時間間隔 $T=1hr$ とする。また、初期流出高を $q_0=0$ 、初期感度係数を $u_0=(\partial q / \partial k)_0=0$ とし、計算打切誤差を $\varepsilon=0.001$ とせよ。

(例題 9の解答)

まず、(4.17)式を使って、 α 、 ϕ 、 γ を算出する。

k の初期値は9.38なので、

$$\alpha = -1/k_0 = -1/9.38 = -0.1066$$

$$\phi = e^{\alpha T} = e^{-0.1066 \times 1} = 0.8989$$

$$\gamma = (e^{\alpha T} - 1) \alpha^{-1} = (e^{-0.1066 \times 1} - 1) \times (-0.1066)^{-1} = 0.9485$$

上に示した γ 、 ϕ を使って各時間の感度係数 u と流出高 q を算出する。感度係数の算出には(4.21)、(4.22)式、流出高の算出には(4.16)式を用いる。

$$d_0 = (q_0 - r_1)/k_0^2 = (0.0 - 0.7760)/9.38^2 = -0.0088$$

$$u_1 = \phi u_0 + \gamma d_0 = 0.8989 \times 0.0 + 0.9485 \times (-0.0088) = -0.0083$$

$$x_1 = r_1/k_0 = 0.7760/9.38 = 0.0827$$

$$q_1 = \phi q_0 + \gamma x_1 = 0.8989 \times 0.0 + 0.9485 \times 0.0827 = 0.0784$$

誤差 e は、(4.4)式より求める。

$$e_1 = q_1^* - q_1 = 0.0010 - 0.0784 = -0.0774$$

$$e_1 u_1 = (-0.0083) \times (-0.0774) = 0.0006$$

$$u_1^2 = (-0.0083)^2 = 0.0001$$

次に $m=1$ の場合を計算すると、

$$d_1 = (q_1 - r_2)/k_0^2 = (0.0784 - 1.8780)/9.38^2 = -0.0205$$

$$u_2 = \phi u_1 + \gamma d_1 = 0.8989 \times (-0.0083) + 0.9485 \times (-0.0205) = -0.0269$$

$$x_2 = r_2/k_0 = 1.8780/9.38 = 0.2002$$

$$q_2 = \phi q_1 + \gamma x_2 = 0.8989 \times 0.0784 + 0.9485 \times 0.2002 = 0.2604$$

$$e_2 = q_2^* - q_2 = 0.0020 - 0.2604 = -0.2584$$

$$e_2 u_2 = (-0.0269) \times (-0.2584) = 0.0070$$

$$u_2^2 = (-0.0269)^2 = 0.0007$$

$m=2$ の場合

$$d_2 = (q_2 - r_3)/k_0^2 = (0.2604 - 1.6400)/9.38^2 = -0.0157$$

$$u_3 = \phi u_2 + \gamma d_2 = 0.8989 \times (-0.0269) + 0.9485 \times (-0.0157) = -0.0391$$

$$x_3 = r_3/k_0 = 1.6400/9.38 = 0.1748$$

$$q_3 = \phi q_2 + \gamma x_3 = 0.8989 \times 0.2604 + 0.9485 \times 0.1748 = 0.3999$$

$$e_3 = q_3^* - q_3 = 0.0110 - 0.3999 = -0.3889$$

$$e_3 u_3 = (-0.0391) \times (-0.3889) = 0.0152$$

$$u_3^2 = (-0.0391)^2 = 0.0015$$

同様に流量個数分、計算を行った結果を表 4.1に示す。

次に、 Δk_0 を(4.12)式によって求めるため $\sum e_i u_i$ 、 $\sum u_i^2$ を求める。

$$\begin{aligned}\sum e_i u_i &= 0.0006 + 0.0070 + 0.0152 + \dots \\ &= 7.8367\end{aligned}$$

表 4.1 初期値 $k=9.38$ のときの計算例

No	有効雨量 (mm/h)	実測流出高 (mm/h)	計算流出高 (mm/h)	誤差 e	d	x	感度係数 u	eu	u^2
0					-0.0088		0.0000		
1	0.7760	0.0010	0.0785	-0.0775	-0.0205	0.0827	-0.0084	0.0006	0.0001
2	1.8780	0.0020	0.2604	-0.2584	-0.0157	0.2002	-0.0269	0.0070	0.0007
3	1.6400	0.0110	0.4000	-0.3890	-0.0026	0.1748	-0.0391	0.0152	0.0015
4	0.6260	0.0210	0.4228	-0.4018	0.0035	0.0667	-0.0376	0.0151	0.0014
5	0.1190	0.0300	0.3921	-0.3621	-0.0172	0.0127	-0.0305	0.0110	0.0009
6	1.9090	0.0490	0.5455	-0.4965	-0.0989	0.2035	-0.0438	0.0217	0.0019
7	9.2510	0.1040	1.4258	-1.3218	-0.0495	0.9862	-0.1332	0.1760	0.0177
8	5.7830	0.2170	1.8664	-1.6494	-0.0178	0.6165	-0.1667	0.2749	0.0278
9	3.4300	0.4020	2.0245	-1.6225	-0.0914	0.3657	-0.1667	0.2705	0.0278
10	10.0640	0.6520	2.8375	-2.1855	-0.1790	1.0729	-0.2365	0.5169	0.0559
11	18.5890	1.1300	4.4304	-3.3004	-0.1135	1.9818	-0.3824	1.2621	0.1462
12	14.4210	2.0320	5.4407	-3.4087	-0.0622	1.5374	-0.4514	1.5388	0.2038
13	10.9090	3.0950	5.9936	-2.8986	-0.1645	1.1630	-0.4647	1.3471	0.2160
14	20.4670	4.2320	7.4572	-3.2252	-0.0043	2.1820	-0.5738	1.8506	0.3292
15	7.8360	6.1720	7.4955	-1.3235	0.0537	0.8354	-0.5198	0.6880	0.2702
16	2.7730	7.3110	7.0180	0.2930	0.0740	0.2956	-0.4164	-0.1220	0.1734
17	0.5070	7.6780	6.3596	1.3184	0.0723	0.0541	-0.3041	-0.4009	0.0925
18	0.0000	7.8770	5.7165	2.1605	0.0650	0.0000	-0.2048	-0.4424	0.0419
19	0.0000	7.7540	5.1384	2.6156	0.0580	0.0000	-0.1224	-0.3202	0.0150
20	0.0310	7.4580	4.6219	2.8361	0.0525	0.0033	-0.0550	-0.1559	0.0030
21	0.0000	6.9440	4.1545	2.7895	0.0472	0.0000	0.0004	0.0011	0.0000
22	0.0000	6.2870	3.7344	2.5526	0.0424	0.0000	0.0452	0.1153	0.0020
23	0.0000	5.5600	3.3568	2.2032	0.0382	0.0000	0.0809	0.1781	0.0065
24	0.0000	4.5730	3.0173	1.5557	0.0343	0.0000	0.1089	0.1694	0.0119
25	0.0000	3.8000	2.7122	1.0878	0.0308	0.0000	0.1304	0.1418	0.0170
26	0.0000	3.1690	2.4379	0.7311	0.0277	0.0000	0.1464	0.1071	0.0214
27	0.0000	2.7140	2.1914	0.5226	0.0249	0.0000	0.1579	0.0825	0.0249
28	0.0000	2.4070	1.9698	0.4372	0.0224	0.0000	0.1656	0.0724	0.0274
29	0.0000	2.1150	1.7706	0.3444	0.0201	0.0000	0.1701	0.0586	0.0289
30	0.0000	1.9390	1.5916	0.3474	0.0181	0.0000	0.1720	0.0597	0.0296
31	0.0000	1.7360	1.4306	0.3054	0.0163	0.0000	0.1717	0.0524	0.0295
32	0.0000	1.5570	1.2859	0.2711	0.0146	0.0000	0.1698	0.0460	0.0288
33	0.0000	1.3850	1.1559	0.2291	0.0131	0.0000	0.1665	0.0381	0.0277
34	0.0000	1.1790	1.0390	0.1400	0.0118	0.0000	0.1621	0.0227	0.0263
35	0.0000	1.0500	0.9339	0.1161	0.0106	0.0000	0.1569	0.0182	0.0246
36	0.0000	0.9260	0.8395	0.0865	0.0095	0.0000	0.1511	0.0131	0.0228
37	0.0000	0.8570	0.7546	0.1024	0.0086	0.0000	0.1449	0.0148	0.0210
38	0.0000	0.7770	0.6783	0.0987	0.0077	0.0000	0.1384	0.0137	0.0191
39	0.0000	0.6990	0.6097	0.0893	0.0069	0.0000	0.1317	0.0118	0.0173
40	0.0000	0.6460	0.5481	0.0979	0.0062	0.0000	0.1249	0.0122	0.0156
41	0.0000	0.5830	0.4926	0.0904	0.0056	0.0000	0.1182	0.0107	0.0140
42	0.0000	0.5210	0.4428	0.0782	0.0050	0.0000	0.1116	0.0087	0.0124
43	0.0000	0.4720	0.3980	0.0740	0.0045	0.0000	0.1051	0.0078	0.0110
44	0.0000	0.4230	0.3578	0.0652	0.0041	0.0000	0.0987	0.0064	0.0097
45	0.0000	0.3760	0.3216	0.0544	0.0037	0.0000	0.0926	0.0050	0.0086
46	0.0000	0.3490	0.2891	0.0599	0.0033	0.0000	0.0867	0.0052	0.0075
47	0.0000	0.3030	0.2598	0.0432	0.0030	0.0000	0.0811	0.0035	0.0066
48	0.0000	0.2680	0.2336	0.0344	0.0027	0.0000	0.0757	0.0026	0.0057
49	0.0000	0.2420	0.2100	0.0320	0.0024	0.0000	0.0705	0.0023	0.0050
50	0.0000	0.2080	0.1887	0.0193	0.0000	0.0000	0.0657	0.0013	0.0043
計								7.8367	2.1145

$$\Sigma u_i^2 = 0.0001 + 0.0007 + 0.0015 + \dots$$

$$= 2.1145$$

$$\Delta k_0 = \frac{\Sigma e_i u_i}{\Sigma u_i^2} = \frac{7.8367}{2.1145} = 3.7062$$

(4.14)式より

$$|\Delta k_0 / k_0| = |3.7062 / 9.38| = 0.3951 > \varepsilon (=0.001)$$

であるから、(4.13)式により、 k 値を更新してもう一度同様の計算を行う。

$$k_1 = k_0 + \Delta k_0 = 9.38 + 3.7062 = 13.0862$$

この k_1 を用いて k_0 のときと同様に α 、 ϕ 、 γ を算出する。

$$\alpha = -1/k_1 = -1/13.0862 = -0.0764$$

$$\gamma = (e^{\alpha T} - 1) \alpha^{-1} = (e^{-0.0764 \times 1} - 1) \times (-0.0764)^{-1} = 0.9628$$

$$\phi = e^{\alpha T} = e^{-0.0764 \times 1} = 0.9264$$

以下、同様に d 、 u 、 x 、 q 、 e 、 eu 、 u^2 を流量個数分求め、 Σeu 、 Σu^2 を計算し、 Δk_1 を算出する。 $|\Delta k_n / k_n| < \varepsilon (=0.001)$ となるまで繰り返し計算を行った結果、7回目に収束した。

表 4.2、図 4.1に最終的な計算結果を示す。一価の貯留方程式の最適化結果を見ると、再現性はピーク近傍の形状を含め良くない。その理由は、図 2.6に示すように一連の降雨による洪水現象は二価関数であり、それを無理に一価関数に近似させたためである。

表 4.2 一価の貯留方程式による計算結果

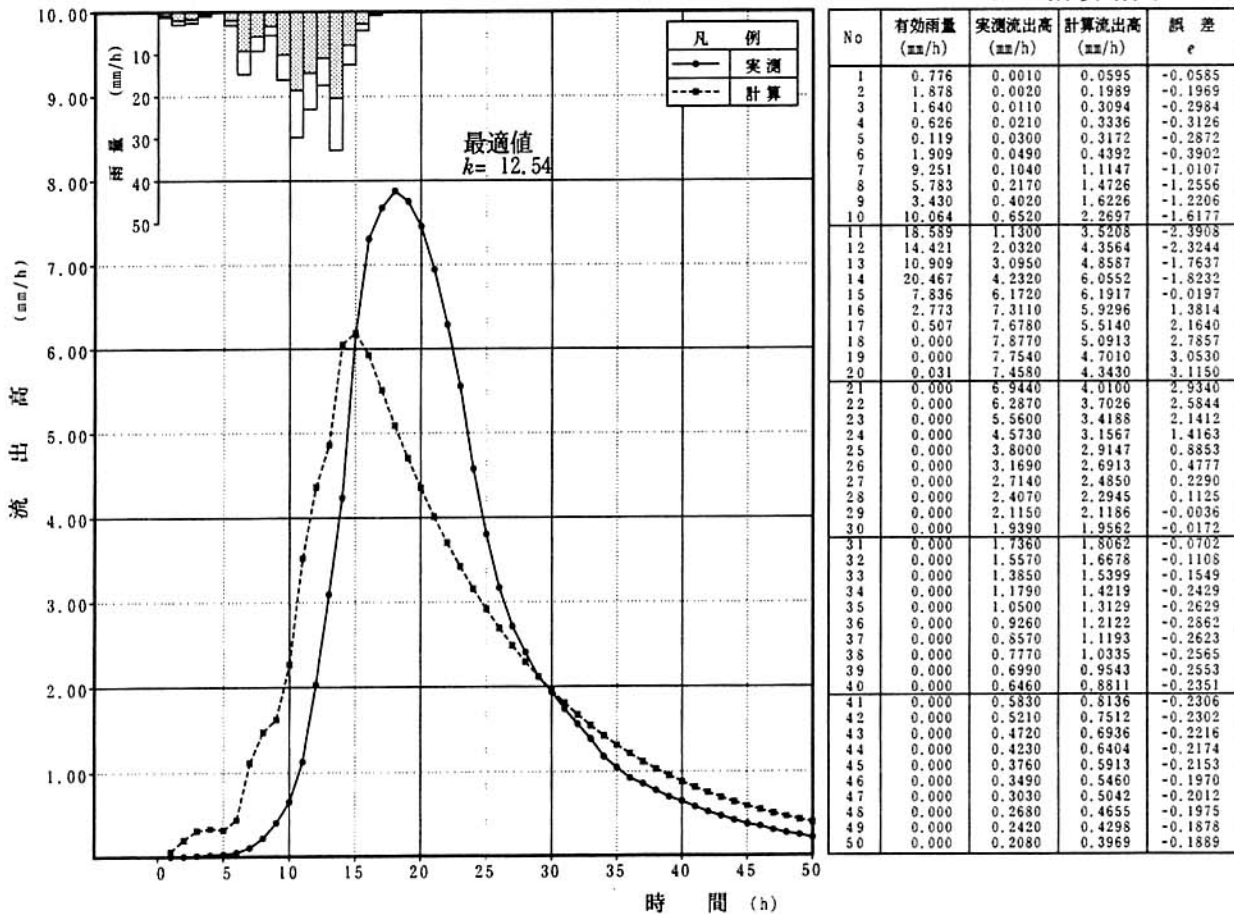


図 4.1 一価の貯留方程式最適化

4-2 二価の線形貯留方程式の最適化

$$\begin{cases} s = k_1 q + k_2 \frac{dq}{dt} & \dots\dots\dots (4.23) \\ \frac{ds}{dt} = r - q & \dots\dots\dots (4.24) \end{cases}$$

ここに、 s :貯留量、 r :有効雨量、 q :流出高、 k_1, k_2 :モデル定数

(4.23)、(4.24)式より、次の2階微分方程式が得られる。

$$k_2 \frac{d^2 q}{dt^2} + k_1 \frac{dq}{dt} + q = r \quad \dots\dots\dots (4.25)$$

(4.25)式において、次の変数変換を行う。

$$\begin{cases} q_1 = q \\ q_2 = \frac{dq}{dt} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (4.26)$$

(4.26)式の両辺を t に関して微分すると、

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = q_2 \\ \frac{dq_2}{dt} = a_2 q_2 + a_1 q_1 - a_1 r \end{cases} \quad \dots\dots\dots (4.27)$$

ここで、 $a_1 = -1/k_2, a_2 = -k_1/k_2$

これを行列表示すると、

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -a_1 r \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4.28)$$

(4.28)式の差分方程式への変換、ならびにモデルパラメータ a_1, a_2 と有効雨量 r が与えられたときの q_1, q_2 の算定法については、例題 7に詳しく示してある。

モデル定数 a_1, a_2 の最適同定のために次の評価基準を設定する。

$$\text{Min } J(a_1, a_2) = \sum e_i^2(a_1, a_2) \quad \dots\dots\dots (4.29)$$

ここに

$$e_i(a_1, a_2) = q_i^* - q_i(a_1, a_2) \quad \dots\dots\dots (4.30)$$

J : 目的関数、 q_i^* :実測流量、 $q_i(a_1, a_2)$: a_1, a_2 が指定されたときの計算流量、 $e_i(a_1, a_2)$: 実測流量と計算流量の誤差

今、極小点の近くの (a_1, a_2) を基準として $(a_1 + \Delta a_1, a_2 + \Delta a_2)$ の所での誤差 $e(a_1 + \Delta a_1, a_2 + \Delta a_2)$ を考えてこれを1次の項までテーラー級数展開すると、

$$e(a_1 + \Delta a_1, a_2 + \Delta a_2) = e(a_1, a_2) + \frac{\partial e(a_1, a_2)}{\partial a_1} \Delta a_1 + \frac{\partial e(a_1, a_2)}{\partial a_2} \Delta a_2 \quad \dots\dots\dots (4.31)$$

(4.31)式中の微係数は、(4.30)式より次式で与えられる。

$$\begin{cases} \frac{\partial e(a_1, a_2)}{\partial a_1} = - \frac{\partial q(a_1, a_2)}{\partial a_1} = -u_1(a_1, a_2) \\ \frac{\partial e(a_1, a_2)}{\partial a_2} = - \frac{\partial q(a_1, a_2)}{\partial a_2} = -u_2(a_1, a_2) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (4.32)$$

ここに、

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\partial q(a_1, a_2)}{\partial a_1} \\ u_2 = \frac{\partial q(a_1, a_2)}{\partial a_2} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (4.33)$$

すなわち u_1 と u_2 はそれぞれ、モデル定数 a_1 、 a_2 に関する感度係数である。

(4.32)式を(4.31)式に代入すると、

$$e(a_1 + \Delta a_1, a_2 + \Delta a_2) = e(a_1, a_2) - u_1(a_1, a_2) \Delta a_1 - u_2(a_1, a_2) \Delta a_2 \quad \dots\dots\dots (4.34)$$

したがって、 $(a_1 + \Delta a_1, a_2 + \Delta a_2)$ 点での目的関数 J は、次式で近似される。

$$J(a_1 + \Delta a_1, a_2 + \Delta a_2) = \sum e_i^2 - 2(\Delta a_1) \sum e_i u_{1i} - 2(\Delta a_2) \sum e_i u_{2i} + 2(\Delta a_1)(\Delta a_2) \sum u_{1i} u_{2i} + (\Delta a_1)^2 \sum u_{1i}^2 + (\Delta a_2)^2 \sum u_{2i}^2 \quad \dots\dots\dots (4.35)$$

ここで、 $e_i = e_i(a_1, a_2)$, $u_{1i} = u_1(a_1, a_2)$, $u_{2i} = u_2(a_1, a_2)$ を意味する。

今、 $(a_1^*, a_2^*) = (a_1 + \Delta a_1, a_2 + \Delta a_2)$ でちょうど極小点になるように $(\Delta a_1, \Delta a_2)$ を決めるためには、次の条件が必要である。

$$\begin{cases} \frac{\partial J(a_1^*, a_2^*)}{\partial (\Delta a_1)} = 0 \\ \frac{\partial J(a_1^*, a_2^*)}{\partial (\Delta a_2)} = 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (4.36)$$

すなわち、

$$\begin{cases} (\Delta a_1) \sum u_{1i}^2 + (\Delta a_2) \sum u_{1i} u_{2i} = \sum e_i u_{1i} \\ (\Delta a_1) \sum u_{1i} u_{2i} + (\Delta a_2) \sum u_{2i}^2 = \sum e_i u_{2i} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (4.37)$$

(4.37)式を行列表示すると、

$$\begin{bmatrix} \sum u_{1i}^2 & \sum u_{1i} u_{2i} \\ \sum u_{1i} u_{2i} & \sum u_{2i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum e_i u_{1i} \\ \sum e_i u_{2i} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4.38)$$

この行列式を以下のように書き換えることができる。

$$[\mathbf{X}^T \mathbf{X}] \mathbf{A} = [\mathbf{X}^T \mathbf{Y}] \quad \dots\dots\dots (4.39)$$

または、

$$\mathbf{A} = [\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1} [\mathbf{X}^T \mathbf{Y}] \quad \dots\dots\dots (4.40)$$

ここで、 $[\mathbf{X}^T \mathbf{X}]$ は (2×2) 行列、 $[\mathbf{X}^T \mathbf{Y}]$ は (2×1) 行列、 $\mathbf{X}^T$ は行列 $\mathbf{X}$ の転置行列を表し、 $[\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1}$ は行列 $[\mathbf{X}^T \mathbf{X}]$ の逆行列を表す。

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^T &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots\dots\dots & u_{1N} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \dots\dots\dots & u_{2N} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Y}^T &= [e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad \dots\dots\dots e_N] \\ [\mathbf{X}^T \mathbf{X}] &= \begin{bmatrix} \sum u_{1i}^2 & \sum u_{1i} u_{2i} \\ \sum u_{1i} u_{2i} & \sum u_{2i}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{X}^T \mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} \sum e_i u_{1i} \\ \sum e_i u_{2i} \end{bmatrix} \\ &\dots\dots\dots (4.41) \end{aligned}$$

(4.40)式を解けば、未知定数ベクトル $\mathbf{A}$ は原理的には求まるが、実際には次の点が問題となる。

- (I) $\mathbf{X}$ の列ベクトルの要素の値が極端に異なる場合には、それに伴って $[\mathbf{X}^T \mathbf{X}]$ の要素の大きさにアンバランスが生じて、逆行列の計算が困難になる場合がある。
- (II) (4.40)式の解法は回帰分析法とまったく同一である。回帰分析手法適用にあたっての原則として、説明変数 $\mathbf{X}$ 間の相関をなるべく小さくするように変数選択を行うことが望ましい。説明変数が統計的に互いに独立であれば、各説明変数の変化量の従属変数に及ぼす影響は偏回帰係数 Δa_1 、 Δa_2 の値によって評価できる便があるからである。逆に $\mathbf{X}$ 間に高い相関がある場合には Δa_1 、 Δa_2 に互いに相殺し合う作用が働き、偏回帰係数 Δa_1 、 Δa_2 の意味づけが困難となる。現実問題として、どうしても高い相関をもつ $\mathbf{X}$ を選択しなければならないときは、なんらかの方策が必要となる。
- (III) (4.40)式では、 $[\mathbf{X}^T \mathbf{X}]$ の逆行列計算が必要であるが、実用面では、この計算はかなり煩わしいものとなる。

以上の問題点の解決法、ならびに(4.40)式の解法は、参考文献2)に詳しく示されている。

(4.40)式から、 n 回目の繰り返し計算での定数 a_1 、 a_2 の値を $a_{1,n}$ 、 $a_{2,n}$ として $\Delta a_{1,n}$ 、 $\Delta a_{2,n}$ を求めると、 $(n+1)$ 回目の定数の値は次式で表される。

$$\begin{cases} a_{1,n+1} = a_{1,n} + \Delta a_{1,n} \\ a_{2,n+1} = a_{2,n} + \Delta a_{2,n} \end{cases} \dots\dots\dots (4.42)$$

繰り返し計算の終了は、次の条件とする。

$$\begin{cases} |\Delta a_{1,n} / a_{1,n}| < \varepsilon_1 \\ |\Delta a_{2,n} / a_{2,n}| < \varepsilon_2 \end{cases} \dots\dots\dots (4.43)$$

次に、(4.27)式から定数 a_1 、 a_2 に関する感度係数を算出する。今、モデル定数が時間的に変化しないものとして(4.27)式を a_1 と a_2 で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{\partial q_1}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial q_1}{\partial a_1} \right) = \frac{\partial q_2}{\partial a_1} \\ \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{\partial q_1}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial q_1}{\partial a_2} \right) = \frac{\partial q_2}{\partial a_2} \\ \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{\partial q_2}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial q_2}{\partial a_1} \right) = a_2 \left(\frac{\partial q_2}{\partial a_1} \right) + q_1 - r + a_1 \left(\frac{\partial q_1}{\partial a_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{\partial q_2}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial q_2}{\partial a_2} \right) = q_2 + a_2 \left(\frac{\partial q_2}{\partial a_2} \right) + a_1 \left(\frac{\partial q_1}{\partial a_2} \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (4.44)$$

(4.44)式は、感度係数に関する微分方程式である。

(4.44)式は次のように整理される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial a_1} \\ \frac{\partial q_1}{\partial a_2} \\ \frac{\partial q_2}{\partial a_1} \\ \frac{\partial q_2}{\partial a_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial a_1} \\ \frac{\partial q_1}{\partial a_2} \\ \frac{\partial q_2}{\partial a_1} \\ \frac{\partial q_2}{\partial a_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1 - r \\ q_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4.45)$$

(4.45)式は、次のように行列表示される。

$$\frac{dU}{dt} = AU + D \dots\dots\dots (4.46)$$

ここに、

$$U = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial a_1} & \frac{\partial q_1}{\partial a_2} & \frac{\partial q_2}{\partial a_1} & \frac{\partial q_2}{\partial a_2} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \hline \alpha_1 \mathbf{I} & \alpha_2 \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{0}:(2 \times 2)$ のゼロ行列, $\mathbf{I}:(2 \times 2)$ の単位行列

$$\mathbf{D} = [0 \ 0 \ d_1 \ d_2]^T \quad d_1 = q_1 - r, \ d_2 = q_2 \quad \dots\dots\dots (4.47)$$

(4.46)式の微分方程式は、次の差分方程式に変換できる。

$$\mathbf{U}_{m+1} = \Phi \mathbf{U}_m + \Gamma \mathbf{D}_{m+1} \quad \dots\dots\dots (4.48)$$

ここに、

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & 0 & \phi_{12} & 0 \\ 0 & \phi_{11} & 0 & \phi_{12} \\ \hline \phi_{21} & 0 & \phi_{22} & 0 \\ 0 & \phi_{21} & 0 & \phi_{22} \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 & \gamma_{12} & 0 \\ 0 & \gamma_{11} & 0 & \gamma_{12} \\ \hline \gamma_{21} & 0 & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & \gamma_{21} & 0 & \gamma_{22} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4.49)$$

Φ 、 Γ の行列内の小行列が対角行列になるのは(4.47)式の $\mathbf{A}$ 行列内の小行列が対角行列になっていることによる。また、 $\phi_{11} \sim \phi_{22}$ 、 $\gamma_{11} \sim \gamma_{22}$ の係数は、(4.28)式の微分方程式を差分方程式で解いたときの係数行列の要素と同一である(例題 7を参照)。

(4.48)式を(4.49)式の要素を用いてスカラー表示すると、

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & 0 & \phi_{12} & 0 \\ 0 & \phi_{11} & 0 & \phi_{12} \\ \hline \phi_{21} & 0 & \phi_{22} & 0 \\ 0 & \phi_{21} & 0 & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 & \gamma_{12} & 0 \\ 0 & \gamma_{11} & 0 & \gamma_{12} \\ \hline \gamma_{21} & 0 & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & \gamma_{21} & 0 & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_m$$

$$\begin{cases} (u_1)_{m+1} = \phi_{11}(u_1)_m + \phi_{12}(u_3)_m + \gamma_{12}(d_1)_m \\ (u_2)_{m+1} = \phi_{11}(u_2)_m + \phi_{12}(u_4)_m + \gamma_{12}(d_2)_m \\ (u_3)_{m+1} = \phi_{21}(u_1)_m + \phi_{22}(u_3)_m + \gamma_{22}(d_1)_m \\ (u_4)_{m+1} = \phi_{21}(u_2)_m + \phi_{22}(u_4)_m + \gamma_{22}(d_2)_m \end{cases} \quad \dots\dots\dots (4.50)$$

(4.50)式の漸化式を用いることにより(4.33)式の感度係数系列 u_1 と u_2 が計算できる。こ

これらの u_1 と u_2 系列を(4.38)式の連立方程式の要素の計算に用いればよい。

(例題 10)

(例題 7)で用いたモデル定数 $k_1=9.38$ 、 $k_2=8.17$ を初期値として鵜川の洪水例(表 1.2)に二価の貯留方程式をあてはめ最適化を行え。なお、計算時間間隔 $T=1hr$ とする。

また、初期値 $q_1(0)=0$ 、 $q_2(0)=0$ 、 $u_1(0)=(\partial q_1/\partial a_1)_0=0$ 、 $u_2(0)=(\partial q_1/\partial a_2)_0=0$ 、 $u_3(0)=(\partial q_2/\partial a_1)_0=0$ 、 $u_4(0)=(\partial q_2/\partial a_2)_0=0$ を与え、 $\phi_{11}\sim\phi_{22}$ 、 $\gamma_{12}\sim\gamma_{22}$ の初期値は、(例題 7)で求めた値を使うこととする。また、計算打切誤差は $\varepsilon=0.001$ とする。

(例題 10)の解答

まず、(4.27)式を使い、 a_1 、 a_2 を算出する。 k_1 の初期値は9.38、 k_2 の初期値は8.17なので、

$$\begin{aligned} a_1 &= -1/k_2 = -1/8.17 = -0.1224 \\ a_2 &= -k_1/k_2 = -9.38/8.17 = -1.1481 \end{aligned}$$

(例題 7)から流出高を算出すると、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_{m+1} &= \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{bmatrix} x_{m+1} \\ &= \begin{bmatrix} 0.957 & 0.583 \\ -0.071 & 0.288 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} 0.350 \\ 0.583 \end{bmatrix} x_{m+1} \end{aligned}$$

スカラー表示すると、

$$\begin{cases} (q_1)_{m+1} = 0.957 \times (q_1)_m + 0.583 \times (q_2)_m + 0.350 x_{m+1} \\ (q_2)_{m+1} = -0.071 \times (q_1)_m + 0.288 \times (q_2)_m + 0.583 x_{m+1} \end{cases} \quad \text{—— ①}$$

ここで、 $x_{m+1} = -a_1 r_{m+1} = 0.1224 \times r_{m+1}$

(4.50)式より、感度係数を算出する式は、

$$\begin{cases} (u_1)_{m+1} = \phi_{11}(u_1)_m + \phi_{12}(u_3)_m + \gamma_{12}(d_1)_m \\ \quad = 0.957(u_1)_m + 0.583(u_3)_m + 0.350(d_1)_m \\ (u_2)_{m+1} = \phi_{11}(u_2)_m + \phi_{12}(u_4)_m + \gamma_{12}(d_2)_m \\ \quad = 0.957(u_2)_m + 0.583(u_4)_m + 0.350(d_2)_m \\ (u_3)_{m+1} = \phi_{21}(u_1)_m + \phi_{22}(u_3)_m + \gamma_{22}(d_1)_m \\ \quad = -0.071(u_1)_m + 0.288(u_3)_m + 0.583(d_1)_m \\ (u_4)_{m+1} = \phi_{21}(u_2)_m + \phi_{22}(u_4)_m + \gamma_{22}(d_2)_m \\ \quad = -0.071(u_2)_m + 0.288(u_4)_m + 0.583(d_2)_m \end{cases} \quad \text{—— ②}$$

ここで、 $(d_1)_m = (q_1)_m - r_{m+1}$ 、 $(d_2)_m = (q_2)_m$

①、②式を使って感度係数 u_1 、 u_2 、 u_3 、 u_4 と流出高 q_1 、 q_2 を算出する。

$$(d_1)_0 = 0.0 - 0.776 = -0.776$$

$$(d_2)_0 = 0.0$$

$$(u_1)_1 = 0.957 \times 0.0 + 0.583 \times 0.0 + 0.350 \times (-0.776) = -0.2716$$

$$(u_2)_1 = 0.957 \times 0.0 + 0.583 \times 0.0 + 0.350 \times 0.0 = 0.0$$

$$(u_3)_1 = (-0.071) \times 0.0 + 0.288 \times 0.0 + 0.583 \times (-0.776) = -0.4524$$

$$(u_4)_1 = (-0.071) \times 0.0 + 0.288 \times 0.0 + 0.583 \times 0.0 = 0.0$$

$$x_1 = 0.1224 \times 0.776 = 0.0950$$

$$(q_1)_1 = 0.957 \times 0.0 + 0.583 \times 0.0 + 0.350 \times 0.0950 = 0.0333$$

$$(q_2)_1 = (-0.071) \times 0.0 + 0.288 \times 0.0 + 0.583 \times 0.0950 = 0.0554$$

誤差 e_m は、(4.30)式より求める。

$$e_1 = q_1^* - q_1 = 0.0010 - 0.0333 = -0.0323$$

$$e_1 u_1 = (-0.0323) \times (-0.2716) = 0.0088$$

$$e_1 u_2 = (-0.0323) \times 0.0 = 0.0$$

$$u_1^2 = (-0.2716)^2 = 0.0738$$

$$u_2^2 = 0.0$$

$$u_1 u_2 = (-0.2716) \times 0.0 = 0.0$$

次に $m=1$ の場合を計算すると(時刻を表わす添字記号は省略する)、

$$d_1 = 0.0333 - 1.878 = -1.8447$$

$$d_2 = 0.0554$$

$$u_1 = 0.957 \times (-0.2716) + 0.583 \times (-0.4524) + 0.350 \times (-1.8447) = -1.1693$$

$$u_2 = 0.957 \times 0.0 + 0.583 \times 0.0 + 0.350 \times 0.0554 = 0.0194$$

$$u_3 = (-0.071) \times (-0.2716) + 0.288 \times (-0.4524) + 0.583 \times (-1.8447) = -1.1865$$

$$u_4 = (-0.071) \times 0.0 + 0.288 \times 0.0 + 0.583 \times 0.0554 = 0.0323$$

$$x_2 = 0.1224 \times 1.878 = 0.2299$$

$$q_1 = 0.957 \times 0.0333 + 0.583 \times 0.0554 + 0.350 \times 0.2299 = 0.1446$$

$$q_2 = (-0.071) \times 0.0333 + 0.288 \times 0.0554 + 0.583 \times 0.2299 = 0.1476$$

$$e_2 = q_2^* - q_2 = 0.0020 - 0.1446 = -0.1426$$

$$e_2 u_1 = (-0.1426) \times (-1.1693) = 0.1667$$

$$e_2 u_2 = (-0.1426) \times 0.0194 = -0.0028$$

$$u_1^2 = (-1.1693)^2 = 1.3673$$

$$u_2^2 = 0.0194^2 = 0.0004$$

$$u_1 u_2 = (-1.1693) \times 0.0194 = -0.0227$$

同様に流量個数分計算を行った結果を表 4.3に示す。

表 4.3 初期値 $k_1=9.38$, $k_2=8.17$ のときの計算例

No	有効雨量 (mm/h)	実測流出高 (mm/h)	計算流出高 (mm/h)	q_1	q_2	誤差 e	d_1	d_2	x
0							-0.7760	0.0000	
1	0.7760	0.0010	0.0331	0.0331	0.0555	-0.0321	-1.8449	0.0555	0.0950
2	1.8780	0.0020	0.1441	0.1441	0.1479	-0.1421	-1.4959	0.1479	0.2299
3	1.6400	0.0110	0.2943	0.2943	0.1494	-0.2833	-0.3317	0.1494	0.2007
4	0.6260	0.0210	0.3958	0.3958	0.0665	-0.3748	0.2768	0.0665	0.0766
5	0.1190	0.0300	0.4228	0.4228	-0.0008	-0.3928	-1.4862	-0.0008	0.0146
6	1.9090	0.0490	0.4857	0.4857	0.1061	-0.4367	-8.7653	0.1061	0.2337
7	9.2510	0.1040	0.9213	0.9213	0.6574	-0.8173	-4.8617	0.6574	1.1323
8	5.7830	0.2170	1.5128	1.5128	0.5361	-1.2958	-1.9172	0.5361	0.7078
9	3.4300	0.4020	1.9078	1.9078	0.2907	-1.5058	-8.1562	0.2907	0.4198
10	10.0640	0.6520	2.4253	2.4253	0.6667	-1.7733	-16.1637	0.6667	1.2318
11	18.5890	1.1300	3.5039	3.5039	1.3472	-2.3739	-10.9171	1.3472	2.2753
12	14.4210	2.0320	4.7566	4.7566	1.1668	-2.7246	-6.1524	1.1668	1.7651
13	10.9090	3.0950	5.7007	5.7007	0.7743	-2.6057	-14.7663	0.7743	1.3353
14	20.4670	4.2320	6.7826	6.7826	1.2781	-2.5506	-1.0534	1.2781	2.5052
15	7.8360	6.1720	7.5745	7.5745	0.4413	-1.4025	4.8015	0.4413	0.9591
16	2.7730	7.3110	7.6278	7.6278	-0.2171	-0.3168	7.1208	-0.2171	0.3394
17	0.5070	7.6780	7.1974	7.1974	-0.5716	0.4806	7.1974	-0.5716	0.0621
18	0.0000	7.8770	6.5566	6.5566	-0.6786	1.3204	6.5566	-0.6786	0.0000
19	0.0000	7.7540	5.8805	5.8805	-0.6634	1.8735	5.8495	-0.6634	0.0000
20	0.0310	7.4580	5.2435	5.2435	-0.6084	2.2145	5.2435	-0.6084	0.0038
21	0.0000	6.9440	4.6644	4.6644	-0.5493	2.2796	4.6644	-0.5493	0.0000
22	0.0000	6.2870	4.1446	4.1446	-0.4910	2.1424	4.1446	-0.4910	0.0000
23	0.0000	5.5600	3.6810	3.6810	-0.4371	1.8790	3.6810	-0.4371	0.0000
24	0.0000	4.5730	3.2686	3.2686	-0.3885	1.3044	3.2686	-0.3885	0.0000
25	0.0000	3.8000	2.9022	2.9022	-0.3451	0.8978	2.9022	-0.3451	0.0000
26	0.0000	3.1690	2.5769	2.5769	-0.3064	0.5921	2.5769	-0.3064	0.0000
27	0.0000	2.7140	2.2879	2.2879	-0.2721	0.4261	2.2879	-0.2721	0.0000
28	0.0000	2.4070	2.0314	2.0314	-0.2416	0.3756	2.0314	-0.2416	0.0000
29	0.0000	2.1150	1.8036	1.8036	-0.2145	0.3114	1.8036	-0.2145	0.0000
30	0.0000	1.9390	1.6014	1.6014	-0.1905	0.3376	1.6014	-0.1905	0.0000
31	0.0000	1.7360	1.4218	1.4218	-0.1691	0.3142	1.4218	-0.1691	0.0000
32	0.0000	1.5570	1.2624	1.2624	-0.1501	0.2946	1.2624	-0.1501	0.0000
33	0.0000	1.3850	1.1208	1.1208	-0.1333	0.2642	1.1208	-0.1333	0.0000
34	0.0000	1.1790	0.9951	0.9951	-0.1184	0.1839	0.9951	-0.1184	0.0000
35	0.0000	1.0500	0.8836	0.8836	-0.1051	0.1664	0.8836	-0.1051	0.0000
36	0.0000	0.9260	0.7845	0.7845	-0.0933	0.1415	0.7845	-0.0933	0.0000
37	0.0000	0.8570	0.6965	0.6965	-0.0828	0.1605	0.6965	-0.0828	0.0000
38	0.0000	0.7770	0.6184	0.6184	-0.0735	0.1586	0.6184	-0.0735	0.0000
39	0.0000	0.6990	0.5491	0.5491	-0.0653	0.1499	0.5491	-0.0653	0.0000
40	0.0000	0.6460	0.4875	0.4875	-0.0580	0.1585	0.4875	-0.0580	0.0000
41	0.0000	0.5830	0.4328	0.4328	-0.0515	0.1502	0.4328	-0.0515	0.0000
42	0.0000	0.5210	0.3843	0.3843	-0.0457	0.1367	0.3843	-0.0457	0.0000
43	0.0000	0.4720	0.3412	0.3412	-0.0406	0.1308	0.3412	-0.0406	0.0000
44	0.0000	0.4230	0.3030	0.3030	-0.0360	0.1200	0.3030	-0.0360	0.0000
45	0.0000	0.3760	0.2690	0.2690	-0.0320	0.1070	0.2690	-0.0320	0.0000
46	0.0000	0.3490	0.2388	0.2388	-0.0284	0.1102	0.2388	-0.0284	0.0000
47	0.0000	0.3030	0.2120	0.2120	-0.0252	0.0910	0.2120	-0.0252	0.0000
48	0.0000	0.2680	0.1883	0.1883	-0.0224	0.0797	0.1883	-0.0224	0.0000
49	0.0000	0.2420	0.1672	0.1672	-0.0199	0.0748	0.1672	-0.0199	0.0000
50	0.0000	0.2080	0.1484	0.1484	-0.0177	0.0596	0.0000	0.0000	0.0000

次に Δa_1 、 Δa_2 を(4.38)式によって求めるため、 $\Sigma(u_1^2)_i$ 、 $\Sigma(u_2^2)_i$ 、 $\Sigma(u_1)_i(u_2)_i$ 、 $\Sigma e_i(u_1)_i$ 、 $\Sigma e_i(u_2)_i$ を求める(表 4.3の合計欄を参照)。

$$\begin{aligned}\Sigma(u_1^2)_i &= 0.0738 + 1.3673 + \dots\dots\dots \\ &= 15171.2\end{aligned}$$

表 4.3 (続き)

No	感 度 係 数				eu_1	eu_2	u_1^2	u_2^2	u_1u_2
	u_1	u_2	u_3	u_4					
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000					
1	-0.2702	0.0000	-0.4535	0.0000	0.0087	0.0000	0.0730	0.0000	0.0000
2	-1.1662	0.0193	-1.1888	0.0324	0.1658	-0.0027	1.3600	0.0004	-0.0225
3	-2.3322	0.0890	-1.1313	0.0943	0.6608	-0.0252	5.4390	0.0079	-0.2075
4	-3.0094	0.1923	-0.3510	0.1079	1.1278	-0.0721	9.0568	0.0370	-0.5788
5	-2.9899	0.2704	0.2765	0.0560	1.1745	-0.1062	8.9397	0.0731	-0.8084
6	-3.2184	0.2913	-0.5755	-0.0037	1.4056	-0.1272	10.3578	0.0849	-0.9376
7	-6.4697	0.3137	-5.0576	0.0401	5.2878	-0.2564	41.8565	0.0984	-2.0293
8	-10.8427	0.5526	-3.8269	0.3733	14.0497	-0.7161	117.5648	0.3054	-5.9922
9	-13.2849	0.9339	-1.4407	0.3807	20.0043	-1.4063	176.4883	0.8722	-12.4071
10	-16.4008	1.2178	-4.2292	0.2121	29.0833	-2.1595	268.9852	1.4831	-19.9731
11	-23.8018	1.5220	-9.4849	0.3633	56.5021	-3.6130	566.5272	2.3165	-36.2267
12	-32.1323	2.1386	-7.3940	0.7826	87.5465	-5.8267	1032.4877	4.5735	-68.7177
13	-37.2267	2.9111	-3.4145	0.7530	97.0024	-7.5855	1385.8260	8.4745	-108.3704
14	-42.7774	3.4967	-6.9450	0.4599	109.1074	-8.9188	1829.9058	12.2273	-149.5818
15	-45.3801	4.0615	0.4558	0.6285	63.6441	-5.6962	2059.3550	16.4961	-184.3133
16	-41.5077	4.4095	6.1832	0.1474	13.1487	-1.3968	1722.8915	19.4434	-183.0271
17	-33.6453	4.2321	8.9018	-0.4001	-16.1700	2.0339	1132.0073	17.9105	-142.3896
18	-24.5024	3.6188	9.1627	-0.7514	-32.3535	4.7784	600.3671	13.0958	-88.6697
19	-15.8198	2.7891	8.2087	-0.8707	-29.6379	5.2253	250.2672	7.7793	-44.1237
20	-8.3111	1.9304	6.9012	-0.8366	-18.4047	4.2749	69.0737	3.7265	-16.0438
21	-2.0975	1.1473	5.6354	-0.7333	-4.7814	2.6154	4.3996	1.3164	-2.4066
22	2.9097	0.4786	4.4900	-0.6131	6.2339	1.0254	8.4666	0.2291	1.3926
23	6.8531	-0.0711	3.4999	-0.4968	12.8773	-0.1336	46.9651	0.0051	-0.4873
24	9.8883	-0.5106	2.6634	-0.3926	12.8982	-0.6660	97.7792	0.2607	-5.0492
25	12.1617	-0.8536	1.9657	-0.3030	10.9183	-0.7663	147.9062	0.7287	-10.3814
26	13.8028	-1.1145	1.3891	-0.2274	8.1732	-0.6599	190.5164	1.2420	-15.3827
27	14.9236	-1.3066	0.9164	-0.1645	6.3585	-0.5567	222.7152	1.7071	-19.4987
28	15.6199	-1.4418	0.5320	-0.1127	5.8670	-0.5415	243.9809	2.0787	-22.5201
29	15.9725	-1.5303	0.2222	-0.0703	4.9736	-0.4765	255.1193	2.3418	-24.4423
30	16.0496	-1.5808	-0.0249	-0.0360	5.4188	-0.5337	257.5896	2.4991	-25.3720
31	15.9086	-1.6008	-0.2193	-0.0085	4.9984	-0.5030	253.0845	2.5627	-25.4673
32	15.5975	-1.5965	-0.3699	0.0132	4.5953	-0.4704	243.2816	2.5488	-24.9013
33	15.1561	-1.5730	-0.4839	0.0303	4.0038	-0.4155	229.7072	2.4743	-23.8403
34	14.6176	-1.5347	-0.5677	0.0433	2.6875	-0.2822	213.6737	2.3552	-22.4333
35	14.0093	-1.4852	-0.6267	0.0530	2.3317	-0.2472	196.2597	2.2058	-20.8063
36	13.3536	-1.4275	-0.6652	0.0600	1.8897	-0.2020	178.3184	2.0377	-19.0622
37	12.6688	-1.3641	-0.6873	0.0648	2.0331	-0.2189	160.4988	1.8607	-17.2811
38	11.9697	-1.2969	-0.6960	0.0677	1.8982	-0.2057	143.2738	1.6820	-15.5237
39	11.2681	-1.2277	-0.6942	0.0692	1.6894	-0.1841	126.9698	1.5072	-13.8335
40	10.5733	-1.1577	-0.6840	0.0695	1.6758	-0.1835	111.7951	1.3402	-12.2402
41	9.8927	-1.0879	-0.6673	0.0688	1.4855	-0.1634	97.8652	1.1835	-10.7623
42	9.2317	-1.0192	-0.6458	0.0674	1.2619	-0.1393	85.2252	1.0388	-9.4093
43	8.5947	-0.9523	-0.6207	0.0655	1.1240	-0.1245	73.8680	0.9069	-8.1846
44	7.9844	-0.8875	-0.5932	0.0632	0.9585	-0.1065	63.7499	0.7877	-7.0864
45	7.4029	-0.8253	-0.5640	0.0605	0.7922	-0.0883	54.8023	0.6812	-6.1099
46	6.8514	-0.7659	-0.5339	0.0577	0.7549	-0.0844	46.9415	0.5867	-5.2477
47	6.3305	-0.7095	-0.5034	0.0547	0.5758	-0.0645	40.0753	0.5033	-4.4913
48	5.8403	-0.6560	-0.4731	0.0517	0.4657	-0.0523	34.1090	0.4304	-3.8314
49	5.3804	-0.6057	-0.4432	0.0486	0.4027	-0.0453	28.9489	0.3668	-3.2587
50	4.9503	-0.5583	-0.4141	0.0456	0.2950	-0.0333	24.5050	0.3117	-2.7639
計					508.2093	-26.1040	15171.2207	148.7860	-1445.1024

$$\begin{aligned}\Sigma(u_2^2)_i &= 0.0 + 0.0004 + \dots \\ &= 148.79\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma(u_1)_i(u_2)_i &= 0.0 + (-0.0227) + \dots \\ &= -1445.10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma e_i(u_1)_i &= 0.0088 + 0.1667 + \dots \\ &= 508.21\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma e_i(u_2)_i &= 0.0 + (-0.0028) + \dots\dots\dots \\ &= -26.104\end{aligned}$$

参考文献4)を参照して、(4.40)式を Δa_1 、 Δa_2 について解くと、

$$\Delta a_1 = 0.2243 \quad , \quad \Delta a_2 = 2.003$$

(4.43)式より

$$\begin{aligned}|\Delta a_1 / a_1| &= |0.2243 / (-0.1224)| = 1.8325 > \varepsilon (=0.001) \\ |\Delta a_2 / a_2| &= |2.003 / (-1.1481)| = 1.7446 > \varepsilon (=0.001)\end{aligned}$$

であるから、 a_1 、 a_2 を更新してもう一度同様の計算を行う。

ここで、(4.42)式により a_1 、 a_2 を更新するが、計算上補正值 Δa_1 、 Δa_2 が大きいと計算が発散する可能性があるので以下のように Δa_1 、 Δa_2 を設定する(詳しくは補遺に示すプログラムを参照)。

$$\Delta a_1 = \Delta a_1 \times fac$$

$$\Delta a_2 = \Delta a_2 \times fac$$

ここで、 fac :補正係数(0.5~1.0)

これより

$$\Delta a_1 = 0.2243 \times 0.5 = 0.1122$$

$$\Delta a_2 = 2.003 \times 0.5 = 1.002$$

(4.42)式より更新した $a_{1,2}$ は、

$$a_{1,2} = a_{1,1} + \Delta a_{1,1} = -0.1224 + 0.1122 = -0.0102$$

$$a_{2,2} = a_{2,1} + \Delta a_{2,1} = -1.1481 + 1.002 = -0.146$$

で与えられる。

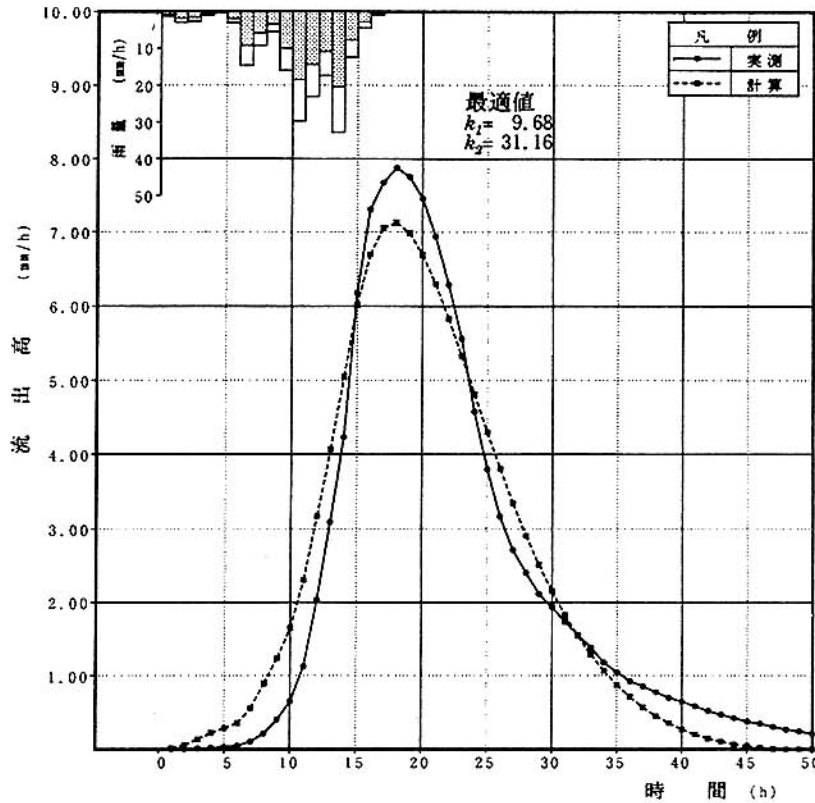
以下、同様に d_1 、 d_2 、 u_1 、 u_2 、 u_3 、 u_4 、 x 、 q_1 、 q_2 、 eu_1 、 eu_2 、 u_1^2 、 u_2^2 、 $u_1 u_2$ を流量個数分求め、 Σu_1^2 、 Σu_2^2 、 $\Sigma u_1 u_2$ 、 Σeu_1 、 Σeu_2 を計算し、 Δa_1 、 Δa_2 を算出する。

$\Delta a_n < \varepsilon (=0.001)$ となるまで繰り返し計算を行った結果、6回目に収束した。

表 4.4、図 4.2に最終的な計算結果を示す。なお、プログラムのフローチャート、解説、リストは補遺に示す。

二価の貯留方程式の最適化結果を見ると、一価の貯留方程式の最適化結果に比べ、再現性が良くなっている。これは、洪水現象は二価関数であり、二価の貯留方程式をあてはめることによって精度が向上したためである。

表 4.4 二価の貯留方程式
による計算結果



No	有効雨量 (mm/h)	実測流出高 (mm/h)	計算流出高 (mm/h)	誤差 ϵ
1	0.776	0.0010	0.0112	-0.0102
2	1.878	0.0020	0.0565	-0.0545
3	1.640	0.0110	0.1363	-0.1253
4	0.626	0.0210	0.2215	-0.2005
5	0.119	0.0300	0.2878	-0.2578
6	1.309	0.0490	0.3576	-0.3086
7	9.251	0.1040	0.5577	-0.4537
8	5.783	0.2170	0.8934	-0.6764
9	3.430	0.4020	1.2400	-0.8380
10	10.064	0.6520	1.6503	-0.9983
11	18.589	1.1300	2.3060	-1.1760
12	14.421	2.0320	3.1743	-1.1423
13	10.908	3.0950	4.0695	-0.9745
14	20.467	4.2320	5.0522	-0.8202
15	7.836	6.1720	6.0139	0.1581
16	2.773	7.3110	6.6957	0.6153
17	0.507	7.6780	7.0548	0.6232
18	0.000	7.8770	7.1305	0.7465
19	0.000	7.7540	6.9898	0.7642
20	0.031	7.4580	6.6947	0.7633
21	0.000	6.9440	6.2946	0.6494
22	0.000	6.2870	5.8282	0.4588
23	0.000	5.5600	5.3259	0.2341
24	0.000	4.5730	4.8111	-0.2381
25	0.000	3.8000	4.3014	-0.5014
26	0.000	3.1690	3.8094	-0.6404
27	0.000	2.7140	3.3439	-0.6299
28	0.000	2.4070	2.9107	-0.5037
29	0.000	2.1150	2.5131	-0.3981
30	0.000	1.9390	2.1525	-0.2135
31	0.000	1.7360	1.8289	-0.0929
32	0.000	1.5570	1.5414	0.0156
33	0.000	1.3850	1.2882	0.0968
34	0.000	1.1790	1.0672	0.1118
35	0.000	1.0500	0.8758	0.1742
36	0.000	0.9260	0.7114	0.2146
37	0.000	0.8570	0.5713	0.2857
38	0.000	0.7770	0.4529	0.3241
39	0.000	0.6990	0.3537	0.3453
40	0.000	0.6460	0.2712	0.3748
41	0.000	0.5830	0.2033	0.3797
42	0.000	0.5210	0.1479	0.3731
43	0.000	0.4720	0.1032	0.3688
44	0.000	0.4230	0.0676	0.3554
45	0.000	0.3760	0.0397	0.3363
46	0.000	0.3490	0.0191	0.3309
47	0.000	0.3030	0.0018	0.3012
48	0.000	0.2680	0.0000	0.2680
49	0.000	0.2420	0.0000	0.2420
50	0.000	0.2080	0.0000	0.2080

図 4.2 二価の貯留方程式最適化

(例題 11)

モデル定数 $k_1=10.00$ 、 $k_2=20.00$ 、 $k_3=20.00$ を初期値として鶴川の洪水例(表 1.2)に以下に示す①の貯留方程式をあてはめ最適化を行え。なお、計算時間間隔 $T=1hr$ とする。

また、初期値 $q_1(0)=q_2(0)=q_3(0)=0$ 、 $u_i(0)=0$ ($i=1\sim9$)とする。また、計算打切誤差は $\epsilon=0.001$ とする。

(例題 11)の解答

$$\begin{cases} s = k_1 q + k_2 \frac{dq}{dt} + k_3 \frac{d^2 q}{dt^2} \\ \frac{ds}{dt} = r - q \end{cases} \quad \text{..... ①}$$

①式は以下のようなになる。

$$\frac{d^3 q}{dt^3} = a_3 \frac{d^2 q}{dt^2} + a_2 \frac{dq}{dt} + a_1 q - a_1 r \quad \text{..... ②}$$

ここで、

$$a_3 = -k_2/k_3, \quad a_2 = -k_1/k_3, \quad a_1 = -1/k_3$$

③式において、次の変数変換を行う。

$$\begin{cases} q_1 = q \\ q_2 = \frac{dq}{dt} \\ q_3 = \frac{d^2q}{dt^2} \end{cases} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

これを行列表示すると、以下のようにになる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_1 r \end{bmatrix} \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

差分表示すると、以下のように表せる。

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{33} \end{bmatrix} (-a_1 r_{m+1}) \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

感度方程式については、

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial a_1} \\ \frac{\partial q_1}{\partial a_2} \\ \frac{\partial q_1}{\partial a_3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_2}{\partial a_1} \\ \frac{\partial q_2}{\partial a_2} \\ \frac{\partial q_2}{\partial a_3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_3}{\partial a_1} \\ \frac{\partial q_3}{\partial a_2} \\ \frac{\partial q_3}{\partial a_3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} q_1 - r \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

とすると、以下のようにになる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ \alpha_1 I & \alpha_2 I & \alpha_3 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (6)$$

⑥式を差分表示すると、以下のように表せる。

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_{11} I & \phi_{12} I & \phi_{13} I \\ \phi_{21} I & \phi_{22} I & \phi_{23} I \\ \phi_{31} I & \phi_{32} I & \phi_{33} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_{13} I \\ \gamma_{23} I \\ \gamma_{33} I \end{bmatrix} Z_m \quad \dots\dots\dots (7)$$

⑤、⑦式の詳しい導き方は、(3.28)~(3.38)式、参考文献3)の3階微分方程式の最適化手法を参照のこと。

⑤、⑦式を使い、逐次計算した最終的な結果を、表 4.5、図 4.3に示す。

この例では6回で繰り返し計算が収束した。2階微分の貯留方程式の最適化結果を見ると、1階微分の貯留方程式の最適化結果に比べ、ピーク近傍の精度がかなり上がっているのがわかる。

(白川俊也、柴田春幸)

表 4.5 2階微分の貯留方程式による計算結果

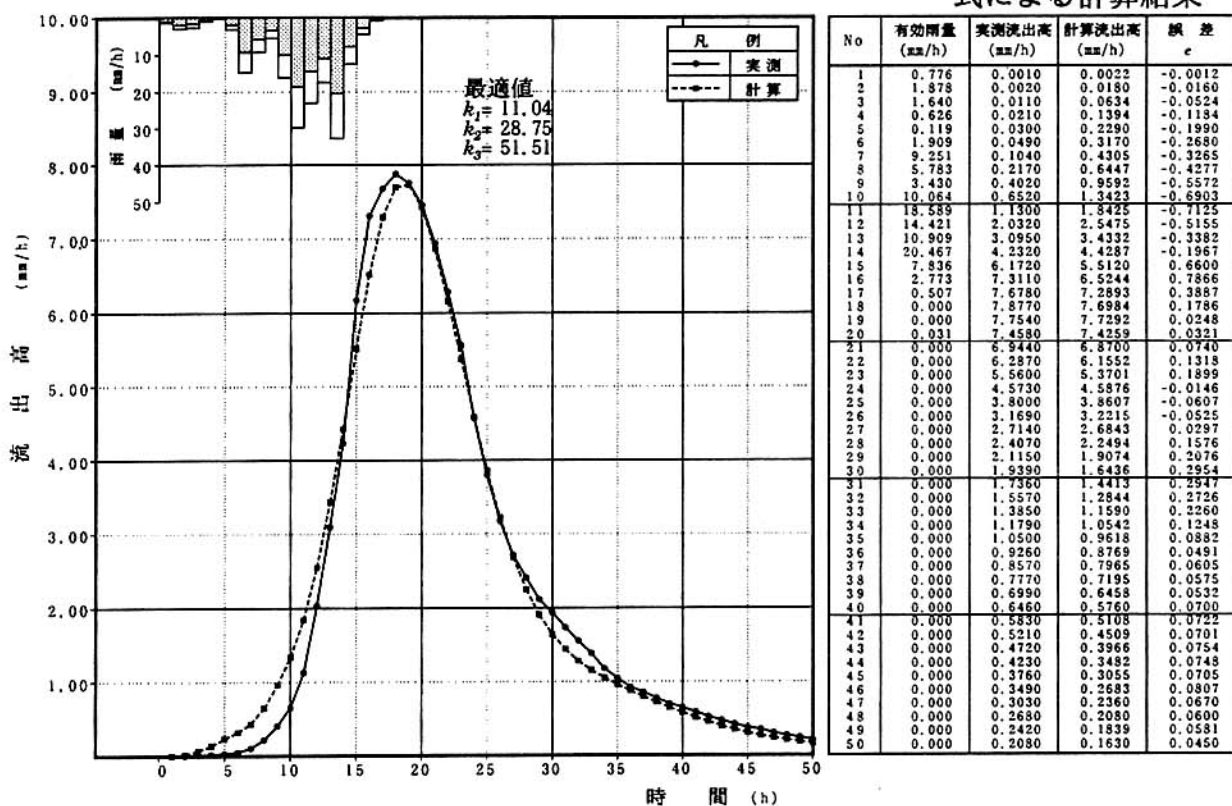
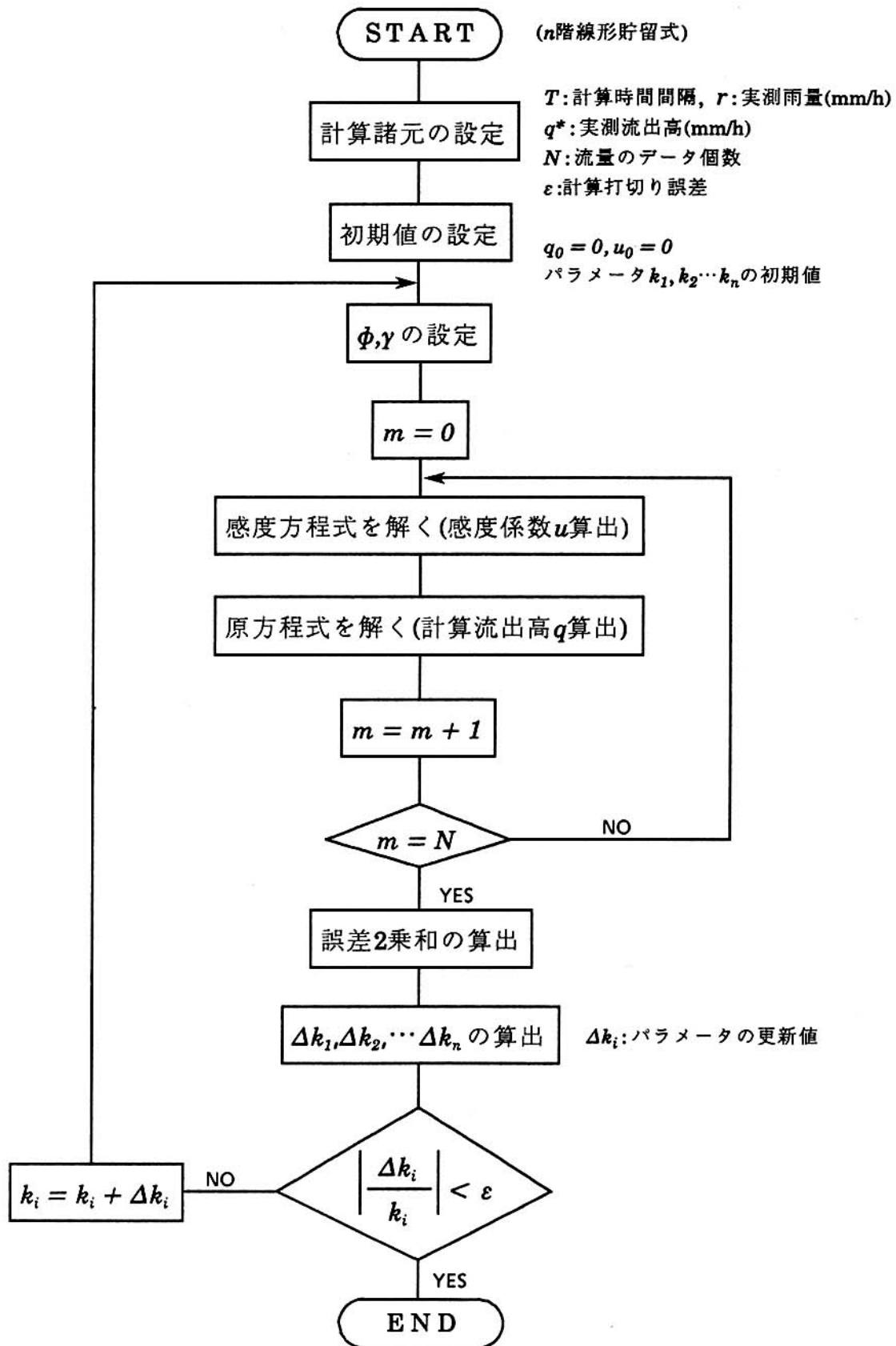


図 4.3 2階微分の貯留方程式最適化

補遺 計算プログラムの概要

(1) プログラムのフローチャート



補遺 計算プログラムの概要

(2) n 階微分方程式のパラメータ同時最適化プログラムの解説

① 主プログラムの変数説明

N: 微分方程式の階数
M: パラメータ個数
NL: 計算時間間隔の分割数
P: 収束許容限界値 ε ($P=0.001$)
NR: 雨量データ個数
NQ: 流量データ個数
AC(I): パラメータ $a_1 \sim a_n$ の初期値
R(I): 降雨入力データ系列
QSTAR(I): 実測流量データ系列
KOUNT: 最大繰返し回数
 (例では $KOUNT=10$)
 この回数以内で収束しない時
 は、最後の出力結果を初期値と
 して繰返し計算を続行する。
A(I,J): 参考文献3)(3.31)式に示す($n \times n$)
 係数行列
X(I): 参考文献3)(3.37)式に示す微分
 方程式 $q_1 \sim q_n$ 特に $X(I)$ は計算流
 出量に対応する。
U(I): (4.50)式感度係数出力 $u_1 \sim u_m$
PAS(I,J): 感度係数行列 この行列の最
 後の列ベクトルには誤差項が
 入っている。
DPA(I): パラメータ補正項

② プログラムの解説

文番号	解 説
18~22	入力データの読み込み
34	繰返し計算の開始
47~50	副プログラム mulan の実行 係数行列 $A(I,J)$ の算出
52	副プログラム phigam の実行
66	副プログラム difsen の実行 感度係数 $U(I)$ の算出
67	副プログラム difsen の実行 微分方程式の解 $X(I)$ を算出
83	副プログラム momreg の実行 下三角コレスキー分解を利用した 成分回帰分析手法
86	収束条件の判定 収束許容限界値以下なら文番号98へ 収束許容限界値以上の場合
95	パラメータ $a_1 \sim a_n$ を更新し文番号34へ
98	繰返し計算の終了

パラメータ最適化に用いられている副プログラムの機能については参考文献1), 2), 3)の補遺にかかけられているので参照されたい。

補遺 計算プログラムの概要

(3) プログラムリスト その1

```

LINE  ---*---1---*---2---*---3---*---4---*---5---*---6---*---7---*---8
1  c=====
2  c      n 階微分方程式のパラメータ同時最適化プログラム
3  c
4  c      s=k1q+k2(dq/dt)+k3(d2q/dt2)+ ..... + kn(dn-1/dtn-1)
5  c      ds/dt=r-q
6  c=====
7      dimension x(10), re(100), qstar(100), er(100), qc(100)
8      dimension pas(100, 7), dpa(7), u(100)
9      dimension a(10, 10), a2(10, 10), a3(10, 10), a4(10, 10), a5(10, 10)
10 c
11     common /st1/ ac(10)
12     common /st2/ phi(10, 10), gam(10)
13     common /ct2/ rain
14 c
15     data p / 0.001 /
16 c
17 c----- データの読み込み -----
18     read(5, '(3i5)') n, m, n1
19     read(5, '(10f8.0)') (ac(i), i=1, m)
20     read(5, '(2i5)') nr, nq
21     read(5, '(10f8.0)') (re(i), i=1, nr)
22     read(5, '(10f8.0)') (qstar(i), i=1, nq)
23 c
24     n1=n-1
25     m1=m+1
26     nm=n*m
27     xnl=n1
28     h=1./xnl
29     xnq=nq
30     fac=0.0
31     kount=10
32 c
33 c----- START OPTIMIZATION -----
34     do 999 kkl=1, kount
35         do 10 i=1, n
36             do 10 j=1, n
37                 a(i, j)=0.0
38     10  continue
39         do 12 i=1, n1
40             j=i+1
41             a(i, j)=1.0
42     12  continue
43         do 14 j=1, n
44             a(n, j)=ac(j)
45     14  continue
46 c--- COMPUTE THE K-TH POWER OF A (A**K, K=1, 2, 3, 4, 5) ---
47     call mulan(n, a, a2)
48     call mulan(n, a2, a3)
49     call mulan(n, a3, a4)
50     call mulan(n, a4, a5)

```

補遺 計算プログラムの概要

(3) プログラムリスト その2

```

LINE  ---*---1---*---2---*---3---*---4---*---5---*---6---*---7---*---8
51  c--- COMPUTE THE COEFFICIENT MATRICES PHI AND GAM ---
52      call phigam(n, a, a2, a3, a4, a5, h)
53  c
54      do 50 i=1, n
55          x(i)=0.0
56      50  continue
57      do 52 i=1, nm
58          u(i)=0.0
59      52  continue
60      sum=0.0
61      do 30 ll=1, nq
62          rain=0.0
63          if(ll.le.nr) rain=re(ll)
64          qq=qstar(ll)
65          do 40 k=1, nl
66              call difsen(n, m, x, u, 1)  ! --- 感度方程式  u  ---
67              call difsen(n, m, x, u, 2)  ! --- 原方程式  x(1) ---
68              if(x(1).le.0.0) x(1)=0.0
69      40  continue
70          err=qq-x(1)
71          er(ll)=err                      ! --- 誤差          er ---
72          qc(ll)=x(1)                    ! --- 計算流出高    qc ---
73          sum=sum+err**2.0                ! --- 誤差の2乗和  sum ---
74          do 42 i=1, m
75              pas(ll, i)=u(i)              ! --- 感度係数行列 pas ---
76      42  continue
77          pas(ll, m1)=err                  ! --- 誤差項 ---
78      30  continue
79          sum=sum/xnq
80          sum=sqrt(sum)
81  c--- COMPONENT REGRESSION METHOD ---
82  c--- TO SOLVE THE CORRECTION TERMS OF PARAMETERS ---
83      call momreg(5, m1, 100, nq, pas, dpa)
84      do 875 i=1, m
85          col=abs(dpa(i)/ac(i))
86          if(col.gt.p) go to 877
87      875  continue
88          go to 879                      ! --- 収束した !! ---
89      877  fac=0.5*(1.+fac)
90          do 878 i=1, m
91              dpa(i)=fac*dpa(i)
92      878  continue
93          do 991 i=1, m
94              xnew=ac(i)+dpa(i)
95              if(xnew.lt.0.0) ac(i)=ac(i)+dpa(i)
96      991  continue
97      999  continue
98      879  continue
99      stop
100     end

```

補遺 計算プログラムの概要

(3) プログラムリスト その3

```

LINE  ---*---1---*---2---*---3---*---4---*---5---*---6---*---7---*---8
101  c----- COMPUTATION FOR THE K-TH POWER OF MATRIX A -----
102      subroutine mulan(n, a, c)
103          dimension a(10, 10), c(10, 10)
104  c
105      common /st1/ b(10)
106  c
107      n1=n-1
108      do 16 i=1, n1
109          i1=i+1
110          do 16 j=1, n
111              c(i, j)=a(i1, j)
112      16 continue
113          do 17 j=1, n
114              j1=j-1
115              s=0.0
116              if(j1.ne.0) s=c(n1, j1)
117              c(n, j)=s+b(j)*c(n1, n)
118      17 continue
119  c
120      return
121      end
122  c----- COMPUTATION OF COEFFICIENT MATRICES PHI AND GAM -----
123      subroutine phigam(n, a, a2, a3, a4, a5, h)
124          dimension a(10, 10), a2(10, 10), a3(10, 10), a4(10, 10), a5(10, 10),
125      -          ai(10, 10)
126  c
127      common /st2/ phi(10, 10), gam(10)
128  c
129      h2=h**2.0
130      h3=h2*h
131      h4=h3*h
132      h5=h4*h
133      do 10 i=1, n
134          do 10 j=1, n
135              ai(i, j)=0.0
136      10 continue
137          do 12 i=1, n
138              ai(i, i)=1.0
139      12 continue
140          do 14 i=1, n
141              do 14 j=1, n
142                  phi(i, j)=ai(i, j) + h*a(i, j) + h2*a2(i, j)/2. + h3*a3(i, j)/6. +
143      -          h4*a4(i, j)/24. + h5*a5(i, j)/120.
144      14 continue
145          do 16 i=1, n
146              gam(i)= h*(ai(i, n) + h*a(i, n)/2. + h2*a2(i, n)/6. +
147      -          h3*a3(i, n)/24. + h4*a4(i, n)/120.)
148      16 continue
149      return
150      end

```

補遺 計算プログラムの概要

(3) プログラムリスト その4

```

LINE  ---*---1---*---2---*---3---*---4---*---5---*---6---*---7---*---8
151  c----- SOLUTION OF THE N-TH ORDER DIFFERENTIAL EQUATION -----
152  c      x(k+1) = phi*x(k) + gam*b(k)
153  c      RECURSIVE FORMULA TO SOLVE X(k+1)
154  c      ijk = 1 : 感度方程式を解く
155  c      ijk = 2 : 原方程式を解く
156      subroutine difsen(n, m, x, u, ijk)
157      dimension x(1), y(10), u(1), uu(100), b(10)
158  c
159      common /st1/ ac(10)
160      common /st2/ phi(10, 10), gam(10)
161      common /ct2/ rain
162      if( ijk .eq. 2 ) go to 2
163  c----- 感度方程式を解く -----
164      1 continue
165      do 66 i=1, m
166          b(i)=x(i)
167      66 continue
168      b(1)=b(1)-rain
169      i1=0
170      do 8 i=1, n
171          do 10 k=1, m
172              i1=i1+1
173              s=0.0
174              do 12 j=1, n
175                  j1=k+m*(j-1)
176                  s=s+phi(i, j)*u(j1)
177      12 continue
178              s=s+gam(i)*b(k)
179              uu(i1)=s
180      10 continue
181      8 continue
182      do 55 i=1, i1
183          u(i)=uu(i)
184      55 continue
185      return
186  c----- 原方程式を解く -----
187      2 continue
188      bin=-ac(1)*rain
189      do 20 i=1, n
190          y(i)=0.0
191          do 22 j=1, n
192              y(i)=y(i)+phi(i, j)*x(j)
193      22 continue
194              y(i)=y(i)+gam(i)*bin
195      20 continue
196      do 24 i=1, n
197          x(i)=y(i)
198      24 continue
199      return
200      end

```

補遺 計算プログラムの概要

(3) プログラムリスト その5

```

LINE  * 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8
201 c--- COMPONENT REGRESSION METHOD ---
202 c    COMPUTE THE CORRECTION TERMS OF PARAMETERS (DPA)
203      subroutine momreg(n1,n,m1,md,x,dpa)
204      dimension x(m1,n1),dpa(1),cov(5,5),g(100,5),y(100,5)
205      dimension binv(5,5),coe(5),st(5)
206      na=n-1
207 c--- COMPUTE COVARIANCE MATRIX ---
208      call sqcov(n1,na,m1,md,x,cov)
209      do 50 i=1,na
210          st(i)=sqrt(cov(i,i))
211      50 continue
212      do 52 i=1,na
213          s=st(i)
214          do 52 j=1,i
215              s1=st(j)
216              cov(i,j)=cov(i,j)/(s*s1)
217              cov(j,i)=cov(i,j)
218      52 continue
219 c--- FACTORIZATION OF COV(I,J) BY LOWER TRIANGULAR ---
220 c--- CHOLESKY METHOD (COV = L * U )
221 c--- L = LOWER TRIANGULAR U = UPPER TRIANGULAR ---
222 c--- COMPUTE THE INVERSE OF U(I,J) ---
223      call lowtri(n1,na,cov,binv)
224      do 54 j=1,na
225          s=st(j)
226          do 54 i=1,md
227              y(i,j)=x(i,j)/s
228      54 continue
229      do 20 i=1,md
230          do 20 j=1,na
231              s=0.
232              do 22 k=1,j
233                  s=s+y(i,k)*binv(k,j)
234      22 continue
235              g(i,j)=s
236      20 continue
237          do 24 i=1,na
238              s=0.0
239              do 26 j=1,md
240                  s=s+g(j,i)*x(j,n)
241      26 continue
242              coe(i)=s
243      24 continue
244          do 30 i=1,na
245              s=0.
246              do 29 j=1,na
247                  s=s+binv(i,j)*coe(j)
248      29 continue
249              dpa(i)=s/st(i)
250      30 continue

```

補遺 計算プログラムの概要

(3) プログラムリスト その6

LINE	1	2	3	4	5	6	7	8
251	return							
252	end							
253	c-----	COMPUTE COVARIANCE MATRIX	-----					
254		subroutine sqcov(n1,n,m1,md,x,cov)						
255		dimension x(m1,n1),cov(n1,n1)						
256	c							
257		do 10 i=1,n						
258		do 10 j=1,i						
259		s=0.						
260		do 12 k=1,md						
261		s=s+x(k,i)*x(k,j)						
262	12	continue						
263		cov(i,j)=s						
264	10	continue						
265		return						
266		end						

補遺 計算プログラムの概要

(3) プログラムリスト その7

```

LINE  ---*---1---*---2---*---3---*---4---*---5---*---6---*---7---*---8
267 c--- LOWER TRIANGULAR CHOLESKY FACTORIZATION ---
268 c      P=U*B
269 c      P=SYMMETRIC MATRIX
270 c      U = LOWER TRIANGULAR MATRIX
271 c      B = UPPER TRIANGULAR MATRIX ( B = UT )
272 c      BINV = INVERSE MATRIX OF B
273 c          = UPPER TRIANGULAR MATRIX
274      subroutine lowtri(n1,n,p,binv)
275      dimension p(n1,n1),binv(n1,n1)
276      dimension u(5,5),b(5,5)
277 c--- COMPUTE LOWER TRIANGULAR U(I,J) ---
278      do 5 j=1,n-1
279          u(j,j)=abs(p(j,j))
280          u(j,j)=sqrt(u(j,j))
281          al=1./u(j,j)
282          do 5 k=n,j+1,-1
283              u(k,j)=al*p(k,j)
284              be=u(k,j)
285              do 5 i=k,n
286                  p(i,k)=p(i,k)-u(i,j)*be
287          5 continue
288          u(n,n)=abs(p(n,n))
289          u(n,n)=sqrt(u(n,n))
290 c
291 c--- B = TRANSPOSE OF U ---
292      do 40 i=1,n
293          do 40 j=1,n
294              b(i,j)=u(j,i)
295      40 continue
296 c
297 c--- COMPUTE INVERSE OF B(I,J) ---
298      binv(1,1)=1./b(1,1)
299      do 50 j=2,n
300          binv(j,j)=1./b(j,j)
301          jml=j-1
302          do 50 k=1,jml
303              sum=0.0
304              do 52 i=k,jml
305                  sum=sum-binv(k,i)*b(i,j)
306          52 continue
307          binv(k,j)=sum*binv(j,j)
308      50 continue
309      return
310      end

```