

現場のための水文学 (3)

——流出解析 その 3 ——

若手水文学研究会*

3-2 二価の貯留関数による流出解析例

3-2-1 パラメータの推定

3-1節では一価貯留関数のあてはめを行ったが、現実には貯留量と直接流出量の関係をグラフにすると、洪水時の場合2章で示したように、上昇期と下降期でループを描くことが多い。そこで、貯留方程式には次のような二価関数のあてはめが考えられる。

$$s = k_1 q + k_2 \frac{dq}{dt} \quad \dots \dots \dots \quad (3.19)$$

ここで、 k_1 , k_2 はパラメータ。

先に述べたように、 k_1 , k_2 の決定は最適化手法によるのが望ましいが、ここでは便宜的に以下の簡便な手法でパラメータの推定を試みる。

パラメータ k_1 については(3.19)式において、

ピーク時に $\frac{dq}{dt} = 0$ となることから、ピーク時の貯留高 s_p と流出高 q_p から求めればよい。

この結果、 $k_1 = \frac{s_p}{q_p} = 9.38$ となるのは明らかであり、これは3.1節でも示した。

ここでは、もうひとつのパラメータ k_2 を決定していく。

連続式は、

$$\frac{ds}{dt} = r - q \quad \dots \dots \dots \quad (3.20)$$

となり、(3.19), (3.20)式から、

$$k_2 \frac{d^2q}{dt^2} + k_1 \frac{dq}{dt} + q = r \quad \dots \dots \dots \quad (3.21)$$

となる。

今、 $q = ce^{-at}$ という関数形を仮定し、その係数 c , a を推定する問題を考える。この際、雨が降り止んだ後のハイドログラフの減水部を対象として解析を行う。つまり、(3.21)式で $r = 0$ として、 $q = ce^{-at}$ を代入すると、

$$(k_2 a^2 - k_1 a + 1) ce^{-at} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (3.22)$$

となるから、

$$k_2 = \frac{ak_1 - 1}{a^2} \quad \dots \dots \dots \quad (3.23)$$

から k_2 を推定できる。ここで、 k_1 はすでに9.38という値を得ている。

a は図 3.11のように片対数紙に流出高をプロットし、ピーク流量生起時点と第一折点を結ぶ線から推定する。

*星 清(水工部長) 鳥谷部寿人, 金高州吾, 三浦敦禎, 市川嘉輝(河川研究室) 中津川 誠, 谷 昭彦, 山口昌志(環境研究室)
佐伯礼子(北開水工コンサルタント) 白川俊也, 柴田春幸(松木設計事務所)

実測データよりピーク流量生起時, 第一折点における時間 t と流出高 q は, 次のとおりである (第 1 章参照)。

$$\begin{cases} t=21 & q=7.87 \\ t=39 & q=0.926 \end{cases}$$

これを $q = ce^{-at}$ に代入して, a , c を求めた結果,

$$a=0.119, \quad c=95.735$$

となる。

この a を(3.23)式に代入して k_2 を求めると、8.17となる。

3-2-2 単位図法による流出解析例

3-1-2節と同様に単位図法を適用して流出高

を算出するが、最初に単位図を求める必要がある。再度、基礎式である(3.21)式を記すと、

$$k_2 \frac{d^2q}{dt^2} + k_1 \frac{dq}{dt} + q = r \quad \dots \dots \dots \quad (3.24)$$

となり、先の定義に従い、単位図は単位パルスを入力したときの応答なので、

$r = u(t) - u(t-1)$ とすると,

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{k_2}(a + be^{At} + ce^{Bt}) & t \leq 1 \\ \frac{1}{k_2}\{be^{At}(1 - e^{-A}) + ce^{Bt}(1 - e^{-B})\} & t > 1 \end{cases} \quad \dots \quad (3.25)$$

ここで、

$$A = \frac{-\frac{k_1}{k_2} + \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 - \frac{4}{k_2}}}{2}$$

$$B = \frac{-\frac{k_1}{k_2} - \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 - \frac{4}{k_2}}}{2}$$

$$a = \frac{1}{AB}, \quad b = \frac{1}{A(A-B)}, \quad c = \frac{1}{B(B-A)}$$

となる。 $h(t)$ の求め方は、例題 5 を参照していただきたい。

単位図がわかったので、先の(3.12)式と同様に線形重ね合わせ原理を利用し、

から流出高が得られる。

ここで、 $h_i = h(i\Delta t)$, $q_i = q(i\Delta t)$ である。

(例題 5)

式(3.24)において、 $r=u(t)$ 、 $r=u(t-1)$ としたときの解をラプラス変換によって求めよ。また、それより $r=u(t)-u(t-1)$ とした場合の解を得よ。

(例題 5 の解答)

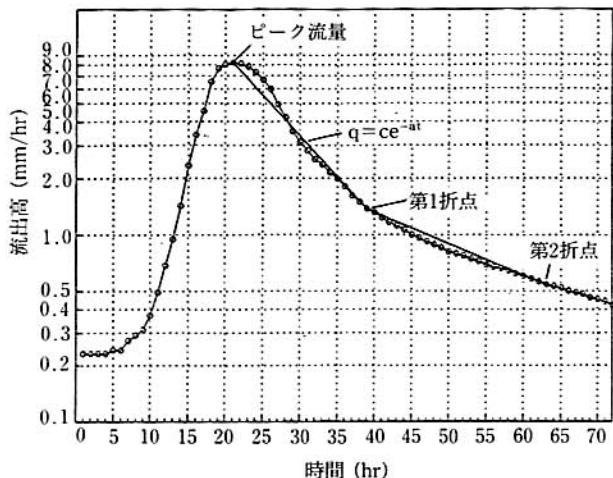


図 3.11 流出高の変化（片対数）

ラプラス変換については、先の例題 2 で示した表 3.1 の利用が実用的である。

$r = u(t)$ のとき、 $k_2 q'' + k_1 q' + q = r$ をラプラス変換すると、

ゼロ初期条件より、①式に $f(0) = f'(0) = 0$ を代入して整理すると、

両辺を k_2 で割ると、

左辺のかっこ内を、

とおく。ここで A, B は 2 次方程式の根なので、

$$A = \frac{-\frac{k_1}{k_2} + \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 - \frac{4}{k_2}}}{2}$$

$$B = \frac{-\frac{k_1}{k_2} - \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 - \frac{4}{k_2}}}{2}$$

となる。

よって、

とすると、

⑤式を逆ラプラス変換して、

を得る。

一方, $r = u(t-1)$ のとき, ラプラス変換より,

⑤式と同様にして、

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{k_2 s (s-A)(s-B)}$$

$$= \frac{1}{k_2} \left(\frac{ae^{-s}}{s} + \frac{be^{-s}}{s-A} + \frac{ce^{-s}}{s-B} \right) \quad \dots \dots \dots \quad ⑩$$

逆ラプラス変換より、

よって、単位パルス $r = u(t) - u(t-1)$ を入力した場合、⑧と⑪より

$$q = \frac{1}{k_2} (be^{At} + ce^{Bt} - be^{A(t-1)} - ce^{B(t-1)})$$

したがって、単位図は下式により計算される。

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{k_2}(a + be^{At} + ce^{Bt}) & t \leq 1 \\ \frac{1}{k_2}\{be^{At}(1 - e^{-A}) + ce^{Bt}(1 - e^{-B})\} & t > 1 \end{cases} \quad \dots \dots \dots \quad (13)$$

ここで、

$$A = \frac{-\frac{k_1}{k_2} + \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 - \frac{4}{k_2}}}{2}$$

$$B = \frac{-\frac{k_1}{k_2} - \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 - \frac{4}{k_2}}}{2}$$

$$a = \frac{1}{AB}, \quad b = \frac{1}{A(A-B)},$$

$$c = \frac{1}{B(B-A)}$$

なお, k_1, k_2 は3-2-1で推定したように, $k_1 = 9.38, k_2 = 8.17$ として与えられる。⑬式を用いて, 単位図を図示したものが図 3.12である。

(例題 6)

表 1.2で示す鶴川の事例から(3.25)式, (3.26)式によって流出高を算出せよ。

(例題 6 の解答)

式(3.26)より、流出高は $q_i = \sum_{j=1}^i h_j r_{i-j+1}$ で得られる。ここに、 h は単位図であり、 r は有効雨量である。 h は(3.25)より下記で求められる。

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{k_2}(a + be^{At} + ce^{Bt}) & t \leq 1 \\ \frac{1}{k_2}\{be^{At}(1 - e^{-A}) + ce^{Bt}(1 - e^{-B})\} & t > 1 \end{cases}$$

r は鶴川の事例より与えられている。

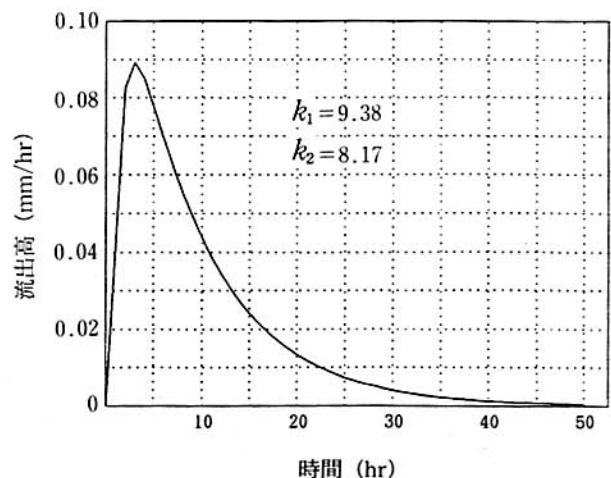


図 3.12 単位図

$$A = \frac{-\frac{k_1}{k_2} + \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 - \frac{4}{k_2}}}{2} = \frac{-\frac{9.38}{8.17} + \sqrt{\left(\frac{9.38}{8.17}\right)^2 - \frac{4}{8.17}}}{2} = -0.118935$$

$$B = \frac{-\frac{k_1}{k_2} - \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 - \frac{4}{k_2}}}{2} = -1.02876$$

$$a = \frac{1}{AB} = 8.17287$$

$$b = -\frac{1}{A(A-B)} = -9.24124$$

$$c = \frac{1}{B(B-A)} = 1.06837$$

単位図

$$h_1 = \frac{1}{8.17}(a + be^A + ce^B) = 0.04280$$

$$h_2 = \frac{1}{8.17}\{be^{2A}(1-e^{-A}) + ce^{2B}(1-e^{-B})\} = 0.08255$$

$$h_3 = \frac{1}{8.17}\{be^{3A}(1-e^{-A}) + ce^{3B}(1-e^{-B})\} = 0.08922$$

$$h_4 = 0.08491 \quad h_5 = 0.07742$$

有効雨量

$$r_1 = 0.776 \quad r_2 = 1.878 \quad r_3 = 1.640 \quad r_4 = 0.626 \quad r_5 = 0.119$$

直接流出高

$$q_1 = h_1 r_1 = 0.04280 \times 0.776 = 0.03321$$

$$q_2 = h_1 r_2 + h_2 r_1 = 0.04280 \times 1.878 + 0.08255 \times 0.776 = 0.14444$$

$$\begin{aligned} q_3 &= h_1 r_3 + h_2 r_2 + h_3 r_1 \\ &= 0.04280 \times 1.640 + 0.08255 \times 1.878 + 0.08922 \times 0.776 = 0.29446 \end{aligned}$$

$$q_4 = h_1 r_4 + h_2 r_3 + h_3 r_2 + h_4 r_1 = 0.39562$$

$$q_5 = h_1 r_5 + h_2 r_4 + h_3 r_3 + h_4 r_2 + h_5 r_1 = 0.42263$$

計算結果をプロットしたものを図 3.13に表わし、計算結果を表 3.4に示す。なお、プログラムのフローチャート、解説、リストは補遺に示す。

3-2-3 漸化式法による流出解析法

前述の3-2-2で単位図法による流出解析法を示したが、同様に微分方程式を解く方法として漸化式法がある。ここでは、その漸化式法による流出解析法を紹介する。

3-1-3では、一階微分方程式を漸化式法で解析した例を示したが、貯留関数によっては、流出高と貯留量の二価関係を表す場合があり、その場合は、高階の微分方程式を解く必要がで

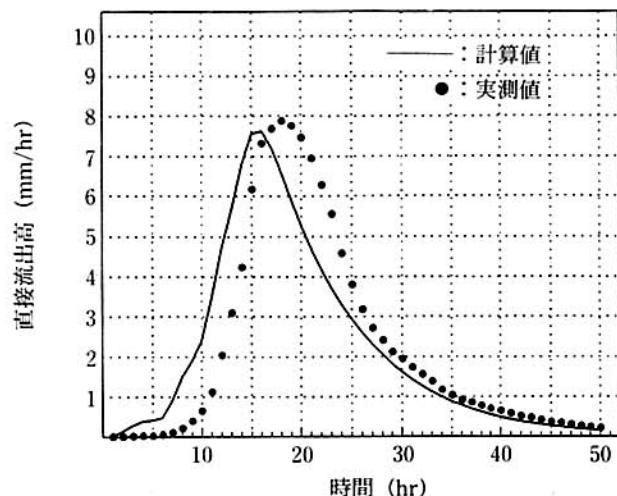


図 3.13 計算実測流出高

表 3.4 計算結果

時間	単位図	計算流出高	実測流出高	時間	単位図	計算流出高	実測流出高
1	0.04280	0.03321	0.001	26	0.00648	2.59450	3.169
2	0.08255	0.14444	0.002	27	0.00576	2.30363	2.714
3	0.08922	0.29446	0.011	28	0.00511	2.04534	2.407
4	0.08491	0.39562	0.021	29	0.00454	1.81596	2.115
5	0.07742	0.42263	0.030	30	0.00403	1.61221	1.939
6	0.06947	0.48594	0.049	31	0.00358	1.43138	1.736
7	0.06194	0.92280	0.104	32	0.00318	1.27085	1.557
8	0.05508	1.51307	0.217	33	0.00282	1.12824	1.385
9	0.04894	1.90736	0.402	34	0.00250	1.00169	1.179
10	0.04347	2.42616	0.652	35	0.00222	0.88933	1.050
11	0.03860	3.50599	1.130	36	0.00197	0.78962	0.926
12	0.03427	4.75709	2.032	37	0.00175	0.70113	0.857
13	0.03043	5.70017	3.095	38	0.00156	0.62259	0.777
14	0.02702	6.78382	4.232	39	0.00138	0.55280	0.699
15	0.02399	7.57305	6.172	40	0.00123	0.49089	0.646
16	0.02130	7.62591	7.311	41	0.00109	0.43585	0.583
17	0.01891	7.19604	7.678	42	0.00097	0.38702	0.521
18	0.01679	6.55582	7.877	43	0.00086	0.34358	0.472
19	0.01491	5.88041	7.754	44	0.00076	0.30503	0.423
20	0.01323	5.25572	7.458	45	0.00068	0.27077	0.376
21	0.01175	4.68777	6.944	46	0.00060	0.24034	0.349
22	0.01043	4.16981	6.287	47	0.00053	0.21335	0.303
23	0.00926	3.70510	5.560	48	0.00047	0.18948	0.268
24	0.00822	3.29069	4.573	49	0.00042	0.16824	0.242
25	0.00730	2.92206	3.800	50	0.00037	0.14942	0.208

くる。この際に、微分方程式が二、三…… n 階と高階になるにつれ、解き方が複雑になると思い込んでしまう。しかし基本的な考え方は、一階微分方程式の場合とほとんど同じである。そこで、以下に n 階微分方程式の解法をわかりやすく解説する。また理解を深めるために、二価の貯留関数を漸化式法を用いて解析する問題を例題としてあげておいたので、参考にしてもらいたい。

最初に(3.24)式で表わされる二階微分方程式の例を考えると、基礎式は、

$$\begin{aligned} \frac{d^2q}{dt^2} &= -\frac{k_1}{k_2} \frac{dq}{dt} - \frac{1}{k_2} q + \frac{r}{k_2} \\ &= a_2 \frac{dq}{dt} + a_1 q + x \quad \dots \dots \dots \quad (3.27) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$a_2 = \frac{-k_1}{k_2}, \quad a_1 = \frac{-1}{k_2}, \quad x = \frac{r}{k_2}$$

である。これと同様に、 n 階微分方程式の場合も次のように解くことができる。 n 階微分方程式を一般的に書くと、

$$\frac{d^n q}{dt^n} = a_n \frac{d^{n-1}q}{dt^{n-1}} + a_{n-1} \frac{d^{n-2}q}{dt^{n-2}} + \dots + a_2 \frac{dq}{dt} + a_1 q + x \quad \dots \dots \quad (3.28)$$

となる。(3.28)式において、次の変数変換を行う。

$$\begin{cases} q_1 = q \\ q_2 = \frac{dq}{dt} \\ \vdots \\ q_n = \frac{d^{n-1}q}{dt^{n-1}} \end{cases} \dots \quad (3.29)$$

(3.29)式の両辺を t に関して微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{dq}{dt} = q_2 \\ \frac{dq_2}{dt} &= \frac{d^2q}{dt^2} = q_3 \\ &\vdots \\ \frac{dq_{n-1}}{dt} &= \frac{d^{n-1}q}{dt^{n-1}} = q_n \\ \frac{dq_n}{dt} &= \frac{d^nq}{dt^n} = a_n q_n + a_{n-1} q_{n-1} + \cdots + a_2 q_2 + a_1 q_1 + x \end{aligned} \quad (3.30)$$

(3.30)式を行行列表示すると, 次のようになる。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

書き換えると,

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = A\mathbf{q} + \mathbf{x} \quad (3.32)$$

ここで,

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

\mathbf{q} は($n \times 1$)行列, A は($n \times n$)の正方行列, \mathbf{x} は($n \times 1$)行列である。

ここで(3.32)式は, 先にあげた(3.13)式と表現形式上同じであることに気づく。よって, (3.16)式に示したものと同様の解き方が利用可能と考えられる。解き方の詳細は, 参考文献¹⁾を参照されたい。

差分表示による(3.32)式の解は, 次式である。

$$\mathbf{q}_{k+1} = \Phi \mathbf{q}_k + \Gamma \mathbf{x}_{k+1} \quad (3.33)$$

ここで,

$$\begin{cases} \Phi = e^{AT} \\ \Gamma = (e^{AT} - I) A^{-1} \end{cases} \quad (3.34)$$

e^{AT} は, 指数関数であり, 次に示される級数和で表現される。よって Φ , Γ は,

$$\Phi = e^{AT} = I + AT + \frac{1}{2} A^2 T^2 + \frac{1}{6} A^3 T^3 + \cdots + \frac{1}{m!} A^m T^m \quad \dots \dots \dots \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= (e^{AT} - I) A^{-1} = \left[I + AT + \frac{1}{2} A^2 T^2 + \frac{1}{6} A^3 T^3 + \cdots + \frac{1}{m!} A^m T^m - I \right] A^{-1} \\ &= T \left[I + \frac{1}{2} AT + \frac{1}{6} A^2 T^2 + \frac{1}{24} A^3 T^3 + \cdots + \frac{1}{m!} A^{m-1} T^{m-1} \right] \\ &\quad \dots \dots \dots \quad (3.36) \end{aligned}$$

ここで、 I は単位行列、 T はサンプリング時間間隔または、計算時間間隔を表わす。

さて、上記級数を展開する場合において、 m を何項目までとすればよいかという問題が起こる。実際に m を大きくするにつれ、その影響は、無視できる程小さくなり、計算機を用いて解く場合にむだな部分が多くなってしまう。そこで次の手法をとる。

- a) 行列 A の要素を a_{ij} とし、 $a_{ij} T$ の絶対値の最大値を Q とする。 $Q = \max |a_{ij} T|$
- b) $(nQ)^m e^{nQ}/m! = 0.001$ を近似的に満たす最小整数値 m をみつける。 n は微分方程式の階数。
- c) Φ, Γ の級数和のうち、 m 項までをとり計算する。

通常、級数は第 5 項くらいまで展開すれば十分だが、非線形の場合には時間刻み T を小さくすることが必要となってくる。また、行列 A^m には規則性があり、いちいちマトリックスのかけ算をする必要がない。その規則性を見いだす方法は、参考文献¹⁾を参照してもらいたい。ここでは、行列 A^m の一般解をあげておくにとどめる(表 3.5)。

これにより(3.33)式は、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}_{k+1} &= \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}_{k+1} \\ &= \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \\ \vdots \\ \gamma_{nn} \end{pmatrix} x_{k+1} \quad \dots \dots \dots \quad (3.37) \end{aligned}$$

と表わされる。あるいは、

$$(q_i)_{k+1} = \sum_{j=1}^n \phi_{ij} (q_j)_k + \gamma_{in}(x)_{k+1} \quad \dots \dots \dots \quad (3.38)$$

$(i=1, 2, \dots, n)$

(3.38)式は、任意の離散時刻、 $(k+1)T$ における流出高を漸化式によって計算できる点で計算機演算に最適である。 n 階微分方程式の最終解は(3.38)式であり、係数 ϕ_{ij} と $\gamma_{in}(i, j=1, 2, \dots, n)$ を表 3.5 のように効率よく計算できれば、高階になろうと恐れる必要はない。

表 3.5 行列 A^m の要素 a^{ij} (i, j) の一般解

(1)	$a^{ij}(i, j) = a^{i-1,j}(i+1, j)$
	$i = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$
	$j = 1, 2, 3, \dots, n$
	$m = 2, 3, 4, \dots$
(2)	$a^{ij}(n, 1) = a_1 a^{ij}(n-1, n)$
(3)	$a^{ij}(n, j) = a^{ij}(n-1, j-1) + a_j a^{ij}(n-1, n)$
	$j = 2, 3, 4, \dots, n$

(例題 7)

表 1.2 で示す鶴川の事例について、漸化式法を用いて流出高を算出せよ。このとき、3-2-1節で便宜的に決定されたパラメータ値 $k_1 = 9.38$, $k_2 = 8.17$ を用い、サンプリング時間間隔は、 $T = 1\text{hr}$ とせよ。

(例題 7 の解答)

まず二価の貯留関数は、次式で表わされる。

$$k_1=9.38, \ k_2=8.17$$

②式に①式を代入して整理すると、次のような。

$$k_1 \frac{dq}{dt} + k_2 \frac{d^2q}{dt^2} + q = r \quad \dots \dots \dots \quad ③$$

③式を(3.28)式と同形式で表現すると、

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{k_1}{k_2}\frac{dq}{dt} - \frac{1}{k_2}q + \frac{1}{k_2}r$$

となり、係数を置換すると次式の $n=2$ の場合の微分方程式の解法が適用できる。

$$a_2 = -\frac{k_1}{k_2}, \quad a_1 = -\frac{1}{k_2}, \quad x = \frac{r}{k_2}$$

④式において、変数変換を行う。

⑤式の両辺を t に関して微分する。

⑥を行列表示すると、

これで、⑦式は(3.32)式と同形式に変換できる。

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = A\mathbf{q} + \mathbf{x} \quad \dots \dots \dots \quad (8)$$

ここで、

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ q_1 & q_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$$

である。

ここで、(3.33)式を用いるにあたり(3.34)式の Φ , Γ の値を計算するが、(3.34)式をプログラム化したものを利用する。ここで A^m の成分 a_{ij} は、表 3.1 を用いて算出できる。また、項数 m を先に述べた基準で求めると $m=12$ となる。

これにより Φ , Γ は、次に示される結果となった。

$$\begin{aligned}\Gamma &= (e^{AT} - I) A^{-1} = \left[I + AT + \frac{1}{2} A^2 T^2 + \frac{1}{6} A^3 T^3 + \dots + \frac{1}{12!} A^m T^m - I \right] A^{-1} \\ &= T \left[I + \frac{1}{2} AT + \frac{1}{6} A^2 T^2 + \frac{1}{24} A^3 T^3 + \dots + \frac{1}{12!} A^{m-1} T^{m-1} \right]\end{aligned}\quad \text{.....(10)}$$

これより、

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.957 & 0.583 \\ -0.071 & 0.288 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.984 & 0.350 \\ -0.043 & 0.583 \end{bmatrix}$$

となる。

最終的に流出高を算出する式は、(3.37)式から次式となる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}_{k+1} &= \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix} x_{k+1} \\ &= \begin{pmatrix} 0.957 & 0.583 \\ -0.071 & 0.288 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} 0.350 \\ 0.583 \end{pmatrix} x_{k+1}. \end{aligned} \quad \text{.....(11)}$$

⑪式により流出高を算出した値は、表 3.6および図 3.14に示すとおりである。なお、図 3.14の結果を例題 6 に示す単位図法の結果と比較すると、まったく同一となることが確認された。以上の計算で用いたプログラムのフローチャート、プログラムの解説、プログラムリストは、補遺に示す。
(佐伯礼子, 山口昌志)

表 3.6 漸化式法による流出高計算結果

時間 (hr)	有効雨量 (mm/h)	流出高 二価漸化式 (mm/h)	流出高 実測値 (mm/h)	時間 (hr)	有効雨量 (mm/h)	流出高 二価漸化式 (mm/h)	流出高 実測値 (mm/h)
1	0.776	0.033219	0.001	26	0	2.577230	3.169
2	1.878	0.144459	0.002	27	0	2.288260	2.714
3	1.640	0.294489	0.011	28	0	2.031680	2.407
4	0.626	0.395643	0.021	29	0	1.803870	2.115
5	0.119	0.422630	0.030	30	0	1.601600	1.939
6	1.909	0.485935	0.049	31	0	1.422010	1.736
7	9.252	0.922906	0.104	32	0	1.262560	1.557
8	5.784	1.513310	0.217	33	0	1.120990	1.385
9	3.430	1.907610	0.402	34	0	0.995293	1.179
10	10.066	2.426480	0.652	35	0	0.883690	1.050
11	18.592	3.506610	1.130	36	0	0.784601	0.926
12	14.423	4.757930	2.032	37	0	0.696623	0.857
13	10.911	5.701080	3.095	38	0	0.618510	0.777
14	20.470	6.784930	4.232	39	0	0.549156	0.699
15	7.838	7.574240	6.172	40	0	0.487578	0.646
16	2.773	7.626830	7.311	41	0	0.432906	0.583
17	0.507	7.196710	7.678	42	0	0.384364	0.521
18	0	6.556460	7.877	43	0	0.341265	0.472
19	0	5.880850	7.754	44	0	0.302998	0.423
20	0.031	5.244030	7.458	45	0	0.269023	0.376
21	0	4.665000	6.944	46	0	0.238857	0.349
22	0	4.145120	6.287	47	0	0.212074	0.303
23	0	3.681470	5.560	48	0	0.188294	0.268
24	0	3.269070	4.573	49	0	0.167180	0.242
25	0	2.902660	3.800	50	0	0.148434	0.208

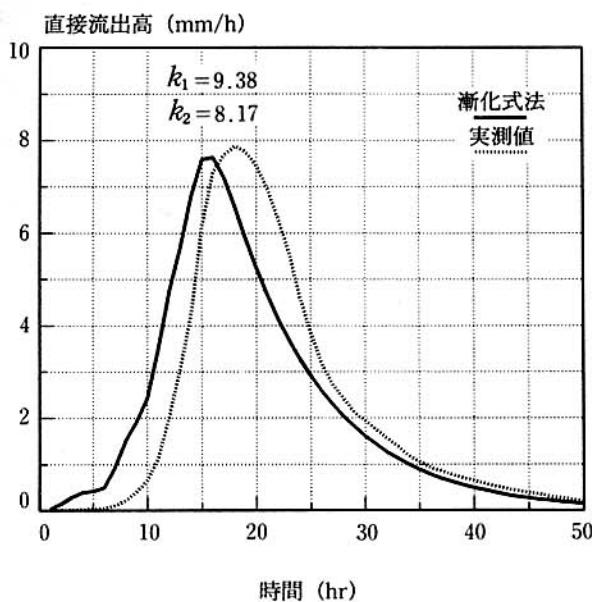


図 3.14 漸化式法と実測値による流出高の比較

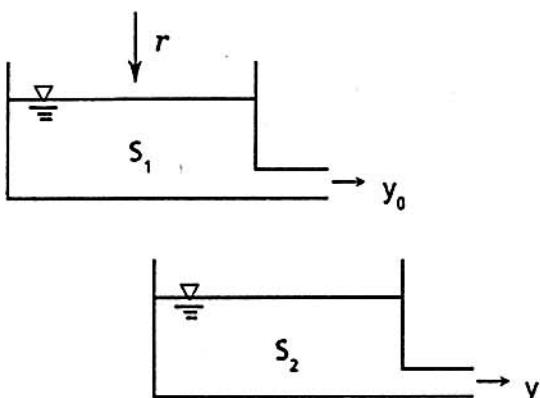


図 3.15 ナッシュモデルの概念図（2段直列タンク）

$$\lambda \frac{dy_0}{dt} + y_0 = r, \quad \lambda \frac{dy}{dt} + y = y_0 \quad \dots \quad (3.40)$$

よって、

$$\lambda^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda \frac{dy}{dt} + y = r \quad \dots \quad (3.41)$$

これがナッシュモデルの基礎式となり、先の(3.24)式の二価貯留関数と同様な形式となっていることに気づく。よって、これまで示したような単位図法や漸化式法の適用が可能である。(3.41)式を漸化式法で解く場合、(3.33)式を参照し、

$$Y_{k+1} = \Phi Y_k + \Gamma X_{k+1} \quad \dots \quad (3.42)$$

ここで、

$$Y = \begin{bmatrix} y \\ dy/dt \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 \\ r/\lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi = e^{AT} = I + AT + \frac{1}{2} A^2 T^2 + \dots + \frac{1}{m!} A^m T^m$$

3-3 線形貯留関数の応用例（ナッシュモデルによる河道遅れ効果）

大河川では、各流域に降った雨が必ずしも同時刻に流出するわけではなく、河道遅れが生ずるので、観測所の流域平均雨量を算定する方法が考えられる。この雨量を遅らせる方法に、ナッシュモデルを応用した例を以下に示す。

一般に流域の上流で降った雨は、上流では鋭敏に、下流になるほど鈍い流出応答を示す。これを貯留効果によるものとみなし、流域平均雨量を補正しようとする方法が図 3.15に示すナッシュモデルである。

図からわかるように1段目のタンクに雨が入力され、2段目のタンクで支川、本川の貯留効果を表わす。なお、ここで出力されるものは流出量ではなく、降雨量である。すなわち、降雨量自体を河道貯留を考慮して補正しようとするのが本モデルの意味である。これを数学的に表わすと、式(3.39)のようになる。

$$\begin{cases} \frac{ds_1}{dt} = r - y_0, & s_1 = \lambda y_0 & \dots & 1 \text{段目} \\ & & & \text{タンク} \\ \frac{ds_2}{dt} = y_0 - y, & s_2 = \lambda y & \dots & 2 \text{段目} \\ & & & \text{タンク} \end{cases} \dots \dots \dots \quad (3.39)$$

ここで s_1, s_2 は1段目、2段目タンクの貯留高 (mm) は、 r は入力となる降雨量 (mm/h), y_0 , y は1段目、2段目タンクから出力される補正降雨量 (mm/h)。

これらから、

$$\Gamma = (e^{at} - I) A^{-1} = T \left(I + \frac{1}{2} A T + \frac{1}{6} A^2 T^2 + \dots + \frac{1}{m!} A^{m-1} T^{m-1} \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/\lambda^2 & -2/\lambda \end{pmatrix}$$

式(3.42)で分割流域ごとに与えられるパラメータ λ (時間遅れを意味する)を用い、分割流域ごとの降雨寄与成分を得る。これを次のように加重平均し、流域最下流での平均雨量 r^* を求める。

ここで、 S ：全流域面積(km^2)、 S_i ： i 流域の流域面積(km^2)、 y_i ： i 流域の寄与降雨量(mm/h)、 N ：流域分割数。

(例題 8)

図 3.16に示す石狩川流域を対象に、ナッシュモデルを用いて石狩大橋地点での平均雨量を求める。この場合、流域一様に図 3.17のような三角形降雨を与えた場合を考えよ。また、各基準点でのパラメータ λ (時間遅れを表わす)は、表 3.7に示す。

(例題 8 の解答)

石狩大橋地点の流域平均雨量を、時間遅れを考慮した(3.41)式を使って算出する。なお、時間遅

表 3.7 石狩川分割流域の基準点でのパラメータと流域面積

上段：パラメータ λ ，下段：流域面積

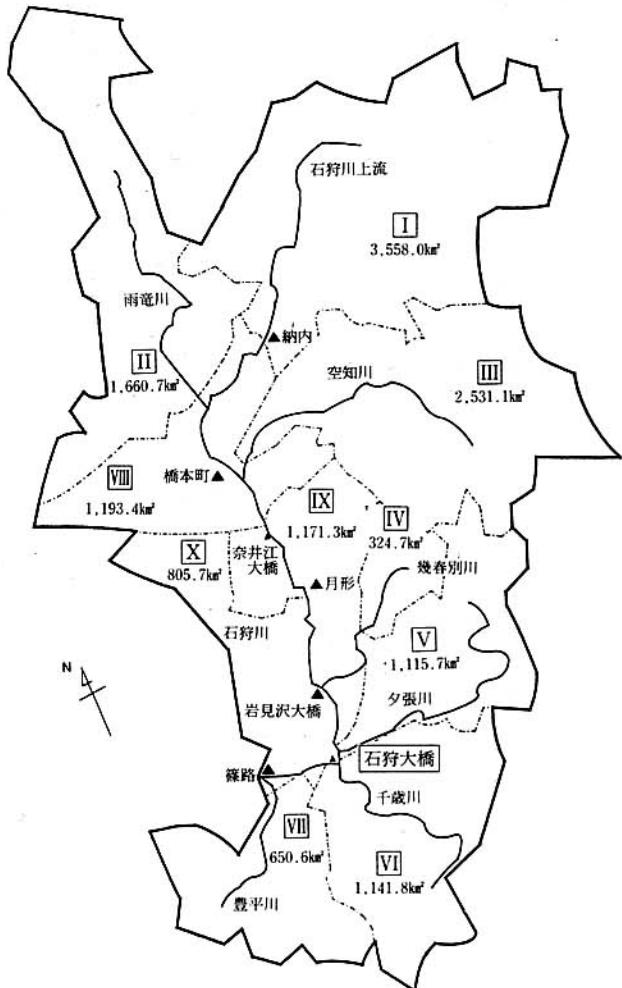


図 3.16 石狩川流域の概要

れを表わす λ は表 3.7 の石狩大橋地点の値を用いる。以下に計算手順を示す。

- ① 各分割流域の雨量を入力する。
- ② (3.42) 式を使い、各分割流域の時間遅れを考慮した降雨を算出する。
- ③ ②で求まった分割流域ごとの降雨から、流域面積の加重平均(式(3.43))により石狩大橋地点の合成雨量を算出する。

計算結果を図 3.18 に示す。(白川俊也)

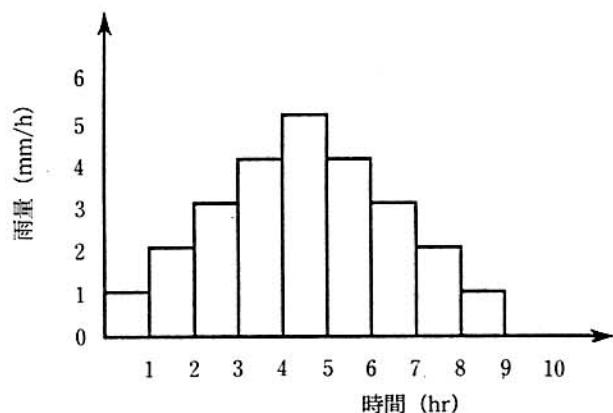


図 3.17 問題で与えた雨量 (全流域共通)

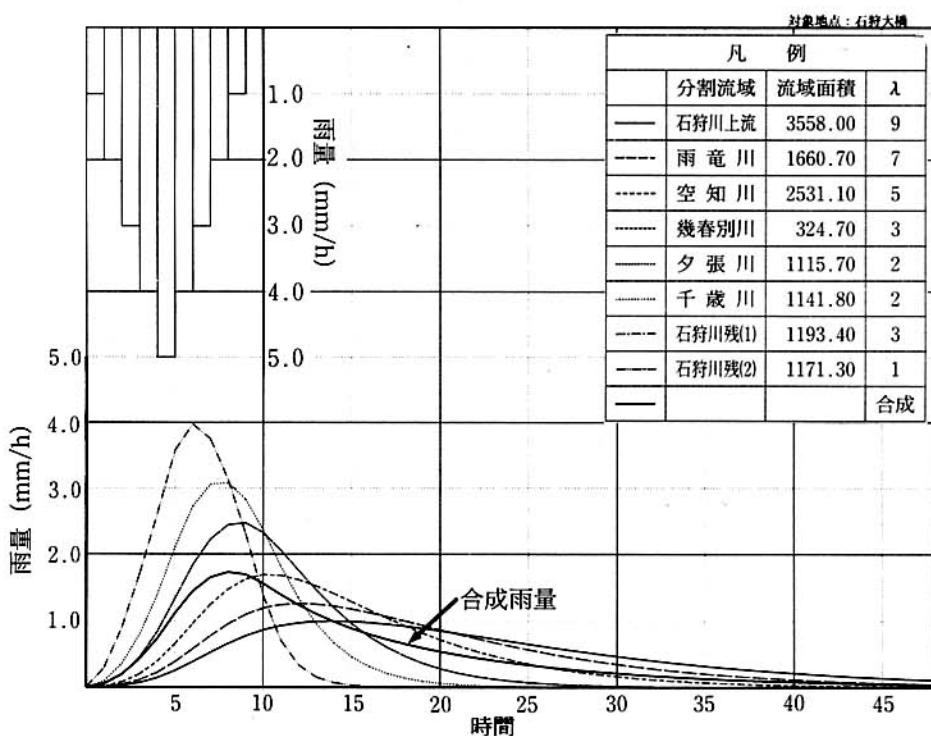
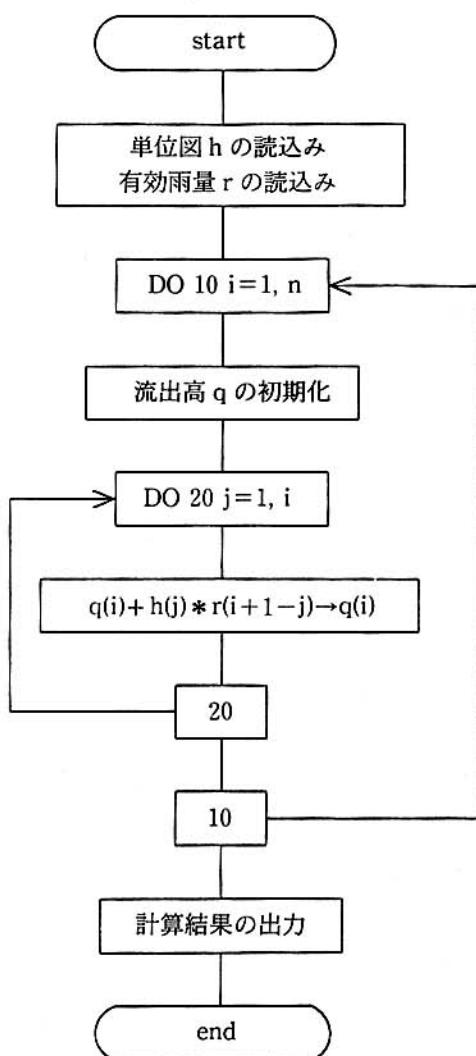


図 3.18 計算結果 (ナッシュモデルを用いた合成雨量)

補遺 計算プログラムの概要

[3] 例題 6

(1) プログラムのフローチャート



(2) プログラムの解説

文番号	解説
1	計算数n
2	配列宣言：流出高y, 有効雨量x 単位図h, 実測流出高tq
4~7	単位図の読み込み
10~13	有効雨量の読み込み
15	計算流出高のサブルーチン
18~20	実測流出高の読み込み
22~24	計算結果を出力

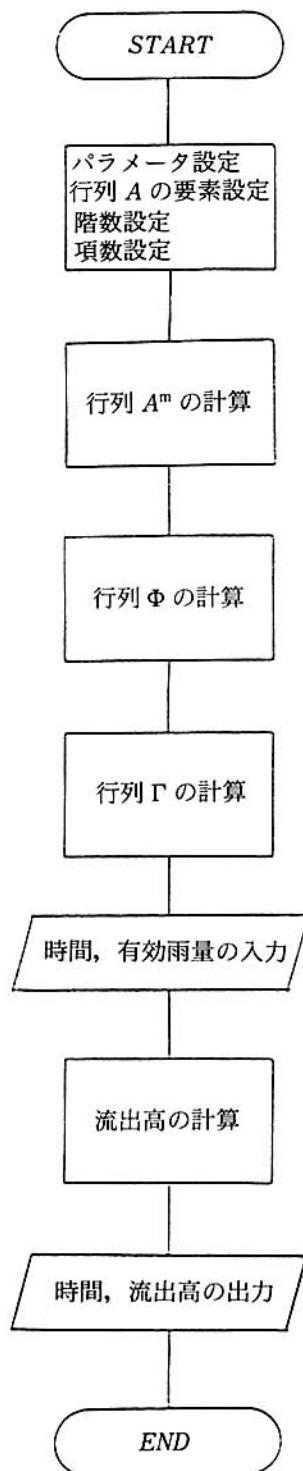
(3) プログラムのリスト

```
00001      parameter (n=50)
00002      real y(n),x(n),h(n),tq(n)
00003      ios=0
00004      open(2,file='tan9.d',iostat=ios)
00005      do i=1,n
00006          read(2,*)h(i)
00007      end do
00008      close(2)
00009      ios=0
00010      open(3,file='yr8.d',iostat=ios)
00011      do i=1,n
00012          read(3,*)x(i)
00013      end do
00014      close(3)
00015      call keisan(y,h,x,n)
00016      ios=0
00017      open(4,file='tq8.d',iostat=ios)
00018      do i=1,n
00019          read(4,*)tq(i)
00020      end do
00021      close(4)
00022      do i=1,n
00023          write(*,'(i3,2f12.5,f10.3)')i,h(i),y(i),tq(i)
00024      end do
00025      stop
00026      end
00027      c
00028      subroutine keisan(y,h,x,n)
00029      real y(n),h(n),x(n)
00030      do i=1,n
00031          y(i)=0.0
00032          do j=1,i
00033              y(i)=y(i)+h(j)*x(i+1-j)
00034          end do
00035      end do
00036      return
00037      end
```

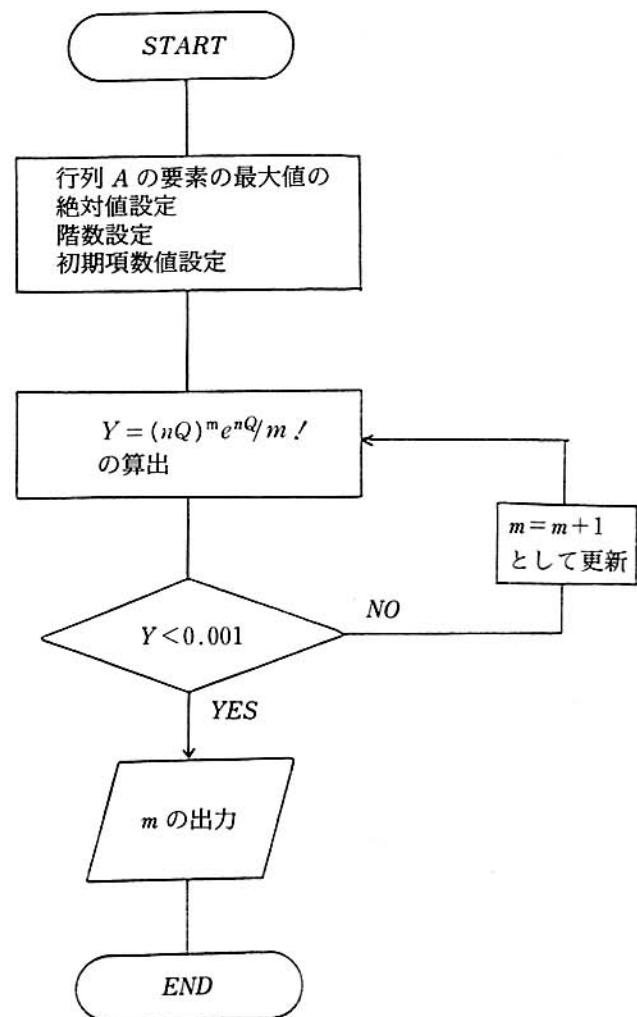
補遺 計算プログラムの概要

[4] 例題 7

(1) 漸化式法(二価)による流出解析 プログラムフローチャート



級数展開の項数を求める
プログラムフローチャート



(2) 漸化式法(二価)による
流出解析プログラムの解説

A : 行列A

X : 有効雨量

T : 時間

YA : 流出高

YB : 流出高を求めるために必要な変数

N : 階数

L : 項数

W : 行列Φの計算式

WA、WB、WC、WD : 行列Φの要素 (ϕ_{11} ,

ϕ_{12} , ϕ_{21} , ϕ_{22})

R : 行列Γの計算式

RA、RB、RC、RD : 行列Γの要素 (γ_{11} , γ_{12} ,

γ_{21} , γ_{22})

Y1、Y2、YA、YB を変数変換したもの

級数展開の項数を求めるプログラムの解説

Q : 行列Aの要素の最大値

N : 階数

Y : 計算式

H1 : 項数

行番号	解説
20	行列Aの要素の最大値
30	最大値の絶対値
40	階数設定
50	階乗の初期値
80	階乗の算出
90	$(nQ)^m * e^{nq} / m!$ の算出
100	判定
120	項数の出力

行番号	解説
40	デメンジョンの宣言
50	行列Aの初期値
80	階数
100	項数
110	行列Aの算出
220	初期値
240	初期値
250	行列Φの算出
400	初期値
420	初期値
430	行列Γの算出
580	
600	データをファイルから読み込むためのオープン文
610	計算結果をファイルに記憶させるためのオープン文
620	データ入力
660	
700	流出高の計算
710	
720	計算結果をファイルに記憶

(3) プログラムリスト

漸化式法(二価)による 流出解析プログラムリスト

```

10 '-----漸化式法による流出解析プログラム-----
20 '
30 '-----行列 A の成分を求める-----
40 DIM A(20,20,20),I(100),X(100),T(100),YA(100),YB(100)
50 A(I,I,1)=0
60 A(I,2,1)=1
70 A(2,1,1)=-.1224
80 A(2,2,1)=-1.1481
90 N=2
100 L=12
110 FOR M=2 TO L
120   FOR I=1 TO N-1
130     FOR J=1 TO N
140       A(I,J,M)=A(I+1,J,M-1)
150     NEXT J
160   N=2
170   A(N,I,M)=A(2,1,1)*A(N-1,N,M)
180     FOR J=2 TO N
190       A(N,J,M)=A(N-1,J-1,M)+A(2,2,1)*A(N-1,N,M)
200   NEXT J
210 NEXT I
220 NEXT M
230 '-----行列 Φ の成分を求める-----
240 HB=1:WA=1:WB=0:WC=0:WD=1
250 FOR M=1 TO L
260   HA=M
270   HB=HB*HA
280   W=A(1,1,M)/HB
290   WA=WA+W
300   W=A(1,2,M)/HB
310   WB=WB+W
320   W=A(2,1,M)/HB
330   WC=WC+W
340   W=A(2,2,M)/HB
350   WD=WD+W
360 NEXT M
370 PRINT "Φ(1,1)(";WA
380 PRINT "Φ(1,2)(";WB
390 PRINT "Φ(2,1)(";WC
400 PRINT "Φ(2,2)(";WD
410 '-----行列 Γ の成分を求める-----
420 HB=1:RA=1:RB=0:RC=0:RD=1
430 FOR M=2 TO L
440   HA=M
450   HB=HB*HA
460   R=A(1,1,M-1)/HB
470   RA=RA+R
480   R=A(1,2,M-1)/HB
490   RB=RB+R
500   R=A(2,1,M-1)/HB
510   RC=RC+R
520   R=A(2,2,M-1)/HB
530   RD=RD+R
540 NEXT M
550 PRINT "Γ(1,1)(";RA
560 PRINT "Γ(1,2)(";RB
570 PRINT "Γ(2,1)(";RC
580 PRINT "Γ(2,2)(";RD
590 '-----漸化式を用い流出高を求める-----
600 OPEN "B:¥2KA.K3" FOR INPUT AS #1
610 OPEN "B:¥2KA.OUT" FOR OUTPUT AS #2
620 INPUT #1,I,X(I)
630 T(I)=I
640 YA(0)=0:YB(0)=0
650 WHILE NOT EOF(1)
660   INPUT #1,I,X(I)
670   T(I)=I
680   Y1=YA(I-1)
690   Y2=YB(I-1)
700   YA(I)=WA*Y1+WB*Y2+RB*X(I)/8.17
710   YB(I)=WC*Y1+WD*Y2+RD*X(I)/8.17
720   PRINT #2,T(I),YA(I)
730   PRINT "YA=";T(I);YA(I)
740 WEND
750 CLOSE : END

```

級数展開の項数を求める プログラムリスト

```

10 '-----行列 A ^ m の項数 m を求めるプログラム-----
20 Q=1.148
30 Q=ABS(Q)
40 N=2
50 M=1
60 FOR H=1 TO 100
70 H1=H
80 M=M*H1
90 Y=((N*Q)^H1)*(EXP(N*Q))/M
100 IF Y<.001 THEN 120
110 NEXT H
120 PRINT "Y="Y"    項数 = "H1
130 END

```